Lomihlav

Košice, 6.12.2024

Úlohy

Úloha 1:

Kôň Rafael povedal gazdovi Tadeášovi tento príklad: „Keď som bol v sade, utrhol som si niekoľko jabĺk a rovnaký počet som dostal aj od bobra Benedikta. Od škrečka Chomika som dostal 6 jabĺk. Polovicu všetkých som dal skunkovi Samovi a pätnásť mi ešte ostalo. Koľko jabĺk som na začiatku utrhol v sade?“

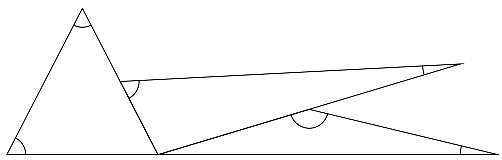
Výsledok: 12

Riešenie:

Keďže Rafaelovi ostalo 15 jabĺk po tom, ako polovicu dal Samovi, pred tým musel mať 30 jabĺk. Od Chomika dostal 6 jabĺk, čiže predtým, ako mu Chomik dal jablká, mal Rafael 24 jabĺk. Vieme, že v sade utrhol rovnako veľa jabĺk ako dostal od Benedikta. Preto je počet jabĺk, ktorý utrhol v sade, polovica z 24, čo je 12 jabĺk.

Úloha 2:

Aký je súčet vyznačených uhlov na obrázku?



Výsledok: 360°

Riešenie:

Súčet vnútorných uhlov v trojuholníku je 180°. Zároveň súčet troch nevyznačených uhlov na priamke je tiež 180° (pretože je to priamy uhol). Na obrázku sa nachádzajú tri trojuholníky, ktoré majú dokopy súčet vnútorných uhlov $3 \cdot 180 = 540°$. Keď od tohto súčtu odrátame priamy uhol v strede, ktorého uhly nie sú vyznačené, tak dostaneme $540 - 180 = 360°$.

Úloha 3:

Poľovník Miloš strieľal na strelnici. Zaplatil si za tri strely a za každý presný zásah mohol strieľať ešte dvakrát zadarmo. Koľkokrát zasiahol cieľ, ak strieľal 15-krát?

Výsledok: 6

Riešenie:

Ak Miloš strieľal dokopy 15-krát a 3 strely mal na začiatku, vďaka svojím zásahom získal ďalších $15 - 3 = 12$ striel. Za jeden zásah dostal 2 strely zadarmo, čiže cieľ zasiahol spolu v $12/2 = 6$ pokusoch.

Úloha 4:

Ježko Dežko robil ovocný šalát pre myšiaka Ratatuja. Dal doň maliny, jahody, hrozno a čerešne. Šalát dokopy obsahoval 280 kúskov ovocia. Bolo v ňom dvakrát viac jahôd než malín, trikrát viac hrozna než čerešní a štyrikrát viac čerešní než jahôd. Koľko čerešní bolo v šaláte?

Výsledok: 64

Riešenie:

Poďme nahrádzať ovocie v šaláte korálkami. Keďže chceme zistiť počet čerešní, tak jedna korálka bude nahrádzať toľko kusov ovocia, koľko čerešní je v celom šaláte.

Na úvod môžeme všetky čerešne nahradiť za jednu korálku, pretože sme povedali, že presne takú hodnotu korálka má.

Ďalej vieme, že hrozna je trikrát viac ako čerešní. Preto keď vyberieme všetko hrozno, môžeme ho nahradiť presne tromi korálkami. Zatiaľ máme štyri korálky.

Čerešní je štyrikrát viac ako jahôd. Čiže jahôd je štyrikrát menej ako čerešní. Preto ich vieme nahradiť štvrtinou korálky. Zatiaľ máme štyri a štvrť korálky a v šaláte už iba maliny.

O malinách zo zadania vieme, že ich je dvakrát menej než jahôd. Takže ak jahody sme vedeli nahradiť za štvrť korálky, tak maliny vieme nahradiť za osminu korálky.

Nahradili sme všetkých 280 kusov ovocia dokopy za štyri celé a tri osminy korálky, čo je 35/8 korálky. Takže jedna korálka má hodnotu $280 \cdot 8/35 = 64$ kusov ovocia. A pretože sme si určili korálku ako presne počet čerešní, aj odpoveď na celú úlohu je 64.

Úloha 5:

Skunkova Samova postupnosť je postupnosť čísel, v ktorej je každé číslo od tretieho ďalej rovné rozdielu predchádzajúcich dvoch, pričom odčítame vždy to menšie od toho väčšieho z nich. Ak Samova postupnosť začína 10, 8, aký je súčet prvých 30 čísel v tejto postupnosti?

Výsledok: 64

Riešenie:

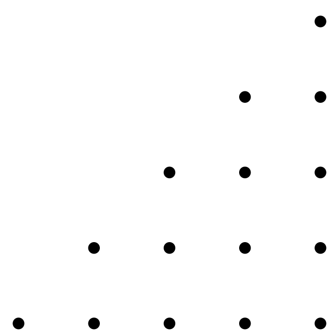
Pri postupnostiach, kde zisťujeme súčet niekoľkých čísel alebo číslo na konkrétnej pozícii, je vhodné zistiť, či daná postupnosť neobsahuje sled opakujúcich sa čísel.

Náš rad by podľa pravidiel pokračoval takto: 10, 8, 2, 6, 4, 2, 2, 0, 2, 2, 0. Môžeme si všimnúť, že sa nám začne opakovať trojica čísel 2, 2, 0. Táto trojica má súčet $2 + 2 + 0 = 4$. Začiatok radu má súčet $10 + 8 + 2 + 6 + 4 = 30$. Aby sme mohli zistiť súčet prvých 30 čísel, chceme vedieť, koľkokrát sa tam opakuje sled 2, 2, 0.

Prvých 5 čísel nespadá do opakujúcej sa trojice, preto nás bude zaujímať, koľko trojíc budeme mať v $30 - 5 = 25$ číslach: $25/3 = 8$ *zv.* 1. Teda sa nám 8-krát zopakuje súčet 4, čo je spolu $8 \cdot 4 = 32$. Zvyšok 1 značí, že ešte z ďalšej trojice doplníme jej začiatočné číslo 2. Celkový súčet prvých 30 čísel postupnosti bude $30 + 32 + 2 = 64$

Úloha 6:

Škrečok Chomík nakreslil na papier body tak, ako sú na obrázku. Tie chceme ofarbiť tak, aby 5 bolo žltých, 4 červené, 3 zelené, 2 modré a 1 oranžový. Koľko existuje takých ofarbení, aby v žiadnom riadku ani stĺpci neboli 2 body ofarbené rovnakou farbou?



Výsledok: 1

Riešenie:

Označme si číslami 1 až 5 riadky v poradí zhora dole a stĺpce sprava doľava. Môžeme si všimnúť, že keďže máme na výber 5 farieb a v 5. riadku aj 5. stĺpci je po 5 bodov, bude v oboch každá farba zahrnutá práve raz. Keďže máme k dispozícii iba jeden oranžový bod, musí sa nachádzať na prieniku tohto riadka a stĺpca, teda v pravom dolnom rohu.

Teraz nám zostávajú už iba 4 farby. V predposlednom riadku aj stĺpci sú 4 body, ktoré musia byť zafarbené 4 rôznymi farbami. Máme teda dva riadky a dva stĺpce, ktoré musia obsahovať všetky 4 zostávajúce farby. Na výber máme 2 modré body, pričom posledný aj predposledný riadok musí každý obsahovať práve jeden z nich, preto modré body musíme umiestniť jeden naľavo od oranžového a jeden nad oranžovým.

Následne máme 3 riadky a 3 stĺpce, ktoré musia obsahovať každú zo zvyšných 3 farieb. K dispozícii nám zostávajú 3 zelené body, ktoré umiestnime tak, aby každý z týchto riadkov a stĺpcov obsahoval práve jeden zelený bod. Zelené body preto musíme umiestniť na diagonálu nasledujúcu za modrou diagonálou.

Podobne postupujeme aj pri červených, aj pri žltých bodoch. Červené body umiestnime na diagonálu nasledujúcu za zelenou a žlté body na poslednú diagonálu nasledujúcu za diagonálou červenou. Toto je jediné ofarbenie bodov, ktoré môžeme dosiahnuť podľa stanovených pravidiel. Riešenie bude vyzerať ako na obrázku nižšie:

				Ž
			Ž	Č
		Ž	Č	Z
	Ž	Č	Z	M
Ž	Č	Z	M	O

Úloha 7:

Turnaj o najlepšieho gazdu prebieha v niekoľkých kolách. V každom kole sa všetci súťažiaci rozdelia do dvojíc (ak je ich nepárny počet, jeden vylosovaný hráč postupuje do ďalšieho kola bez boja) a potom všetky dvojice odohrajú svoj zápas. Víťaz každého zápasu postupuje do ďalšieho kola. Takto sa hrá až pokiaľ nezostane len posledná dvojica, tá odohrá finálny zápas a víťaz vyhráva turnaj. Ak sa turnaja zúčastnilo 2024 účastníkov, koľko jednotlivých zápasov prebehlo?

Výsledok: 2023

Riešenie:

O každom zápase vieme, že z neho vždy práve jeden súťažiaci postúpi a jeden vypadne. Keďže je súťažiacich 2024 a na konci ostal len 1 víťaz, znamená to, že všetci ostatní 2023 súťažiaci vypadli. To sa stane po presne 2023 zápasoch.

Úloha 8:

Poľovník Miloš má 5 klobás a 4 slaniny, ktoré si suší na šnúre tak, že chce, aby boli zľava doprava aj sprava doľava v rovnakom poradí, teda symetricky. Koľkými rôznymi spôsobmi ich vie Miloš rozvešať?

Výsledok: 6

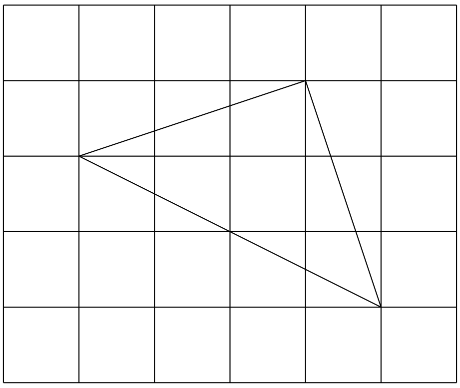
Riešenie:

Keďže klobás je nepárny počet a chceme, aby bolo všetko zavesené symetricky, musí byť jedna v strede radu. Pred ňou aj za ňou musia byť tie isté veci, preto nám stačí pozrieť na to, čo visí na jednej strane a druhú len doplniť symetricky. Takto získame všetky možnosti.

Ostávajú nám ešte 4 klobásy a 4 slaniny, pričom na jednej strane sa nachádza polovica z nich, čiže 2 klobásy a 2 slaniny. Všetky možné kombinácie týchto štyroch vecí sú: KKSS, KSKS, KSSK, SSKK, SKSK a SKKS, čo je dokopy 6 možností.

Úloha 9:

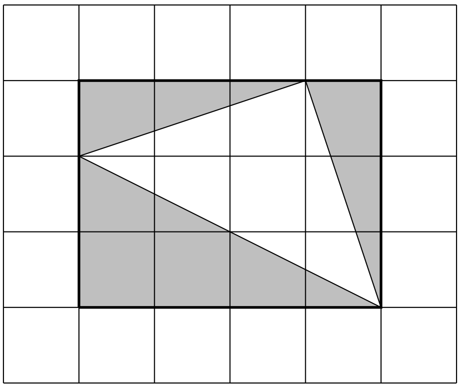
Na poli tvaru štvorčekovej mriežky veľkom 5×6 vyoral gazda trojuholník ako na obrázku. Akú veľkú časť poľa zaberá?



Výsledok: 1/6

Riešenie:

Nech obsah jedného štvorčeka mriežky je rovný 1. Obsah hľadaného trojuholníka zistíme tak, že od obdĺžnika 3×4 okolo neho odčítame časti, ktoré mu nepatria (na obrázku vyznačené sivou farbou). Najväčší sivý trojuholník je polovica obdĺžnika 2×4, takže má obsah 4. Menšie sivé trojuholníky sú obidva polovica obdĺžnika 1×3, takže spolu tvoria jeden takýto obdĺžnik, teda dokopy majú obsah 3. Obsah sivých trojuholníkov je 7 a obsah obdĺžnika 3×4 okolo je 12. Obsah hľadaného trojuholníka je ich rozdiel, teda $12 - 7 = 5$. Celé pole má obsah $5 \cdot 6 = 30$. Hľadaný trojuholník teda zaberá $5/30 = 1/6$ z celého poľa.



Úloha 10:

Kôň Rafael chodil na konskú univerzitu, kde dostal 10 známok zo závodenia, ktoré majú rovnakú váhu. Ich aritmetický priemer bol 2,1. Vypočítajte koľko dostal Rafael trojok a koľko štvoriek, ak dostal 4 jednotky, 2 dvojky a nedostal žiadnu päťku.

Výsledok: 1 štvorka a 3 trojky

Riešenie:

Keďže zatiaľ nepoznáme koľko trojok a štvoriek Rafael dostal, tak si tie počty označíme ako $trojky$ a $stvorky$. Vieme, že celkový počet známok musí byť 10 a aj to, že dostal 4 jednotky, 2 dvojky a žiadnu päťku. Počet trojok a štvoriek dokopy teda musí byť $10 - 4 - 2 = 4$. Zapísať si to vieme ako $trojky + stvorky = 4$.

Teraz si zapíšeme aritmetický priemer zo zadania. Najprv teda pre každú hodnotu známky vynásobíme jej hodnotu jej počtom a tieto čísla následne sčítame. Keďže máme 10 známok, tak to na konci musíme vydeliť číslom 10. Dokopy to teda bude vyzerať nasledovne:

$$(1 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot trojky + 4 \cdot stvorky + 5 \cdot 0)/10 = (8 + 3 \cdot trojky + 4 \cdot stvorky)/10 = 2{,}1$$

Vynásobením celej rovnice 10 dostaneme:

$$8 + 3 \cdot trojky + 4 \cdot stvorky = 21$$

a po odčítaní 8 máme:

$$3 \cdot trojky + 4 \cdot stvorky = 13$$

Vieme, že $trojky + stvorky = 4$. V našej rovnici vďaka tomu vieme až 3 dvojice $trojky + stvorky$ nahradiť za 4. Zvýšia nám už len jedny $stvorky$:

$$\begin{aligned} 3 \cdot (trojky + stvorky) + stvorky &= 13 \\ 3 \cdot 4 + stvorky &= 13 \end{aligned}$$

Po odčítaní 12 dostaneme $stvorky = 1$. Z toho hneď máme, že trojky budú tri, nakoľko súčet ich počtov musí byť 4.

Kôň Rafael teda dostal 3 trojky a 1 štvorku.

Úloha 11:

Bobor Benedikt, myšiak Ratatuj, ježko Dežko a škrečok Chomik sa zúčastnili súťaže v obhrýzaní mrkiev a umiestnili sa na prvých 4 miestach. Od 3 sliepok sme sa dozvedeli:

- „Chomik bol prvý a Ratatuj druhý“
- „Chomik bol druhý a Dežko tretí“
- „Benedikt bol druhý a Dežko tretí“

Určte poradie, v akom skončili, ak každá sliepka v jednej časti svojho výroku klamala a v jednej hovorila pravdu.

Výsledok: Benedikt, Ratatuj, Dežko, Chomik

Riešenie:

Aby sme určili poradie v akom skončili, potrebujeme najprv zistiť, ktoré časti výrokov sú pravdivé. Hľadáme teda medzi nimi spor.

Druhá aj tretia sliepka povedali, že Dežko skončil tretí. Buď obe v tomto výroku klamali alebo obe hovorili pravdu. Ak by klamali, boli by pravdivé výroky, že *Chomik bol druhý* a *Benedikt bol druhý*. Tu však nastáva spor. Preto výrok *Dežko bol tretí* musí byť pravdivý a výroky *Chomik bol druhý* a *Benedikt bol druhý* musia byť nepravdivé.

Teraz vieme povedať, že Dežko, Chomik ani Benedikt sa nemohli umiestniť na druhom mieste. Preto výrok *Ratatuj bol druhý* musí byť pravdivý a výrok *Chomik bol prvý* je nepravdivý.

Následne môžeme určiť výsledné poradie: Dežko bol určite tretí, Ratatuj bol druhý, Chomik nemohol byť prvý, a preto je určite štvrtý. Prvé neobsadené miesto patrí Benediktovi.

Úloha 12:

Štvorcová podlaha škrečieho paláca je pokrytá rovnakými ružovými dlaždicami. Keď vieme, že na oboch uhlopriečkach je spolu 37 dlaždíc, koľko dlaždíc pokrýva celú podlahu?

Výsledok: 361

Riešenie:

Spolu je na uhlopriečkach 37 dlaždíc, čo je nepárne číslo. Obe uhlopriečky majú rovnako veľa dlaždíc. Na to, aby mohol byť spolu na uhlopriečkach nepárny počet dlaždíc, musia uhlopriečky mať jednu dlaždicu spoločnú, ktorá je presne v strede podlahy.

Každá z uhlopriečok má teda 19 dlaždíc, spolu majú 38. Z toho je ale jedna dlaždica spoločná, preto je dokopy na uhlopriečkach 37 dlaždíc. Zároveň platí, že v každom riadku podlahy leží práve jedna dlaždica uhlopriečky. Preto aj počet dlaždíc v riadku je 19. To bude platiť aj pre počet dlaždíc v stĺpci, ktorý sa bude takisto rovnať 19. Máme zrátať, koľko dlaždíc je dokopy na podlahe, čo vypočítame ako $19 \cdot 19$, čo je 361.

Úloha 13:

Kôň Rafael má postavenú ohradu v tvare obdĺžnika s rozmermi 1176×396 metrov. Chce zistiť, koľko kukuricových katapultov je možné po obvode ohrady vybudovať, ak má platiť, že v každom rohu musí byť katapult a rozostupy medzi katapultami musia byť všade rovnaké. Koľko najmenej kukuricových katapultov je možné postaviť?

Výsledok: 262

Riešenie:

Pre čo najmenej katapultov potrebujeme mať čo najväčšie rozostupy. Zároveň aby mohli byť rovnaké rozostupy na oboch stranách a katapulty v každom rohu, musia byť dĺžky oboch strán deliteľné veľkosťou rozostupu. Hľadáme teda najväčšieho spoločného deliteľa 1176 a 396, ktorým je 12. Na strane ohrady dlhej 1176 bude $1176/12 = 98$ katapultov, na druhej strane ohrady bude $396/12 = 33$ katapultov. Obdĺžnik má dve dlhé strany a dve kratšie, teda počty katapultov zdvojnásobíme. $98 \cdot 2 = 196$ a $33 \cdot 2 = 66$. Spolu máme $196 + 66 = 262$ katapultov.

Úloha 14:

Kôň Rafael sa na hodine konskej matematiky tak nudil, až sa rozhodol zistiť, koľko je všetkých trojciferných čísel, ktoré neobsahujú číslicu 2 ani číslicu 3. Koľko ich napočítal?

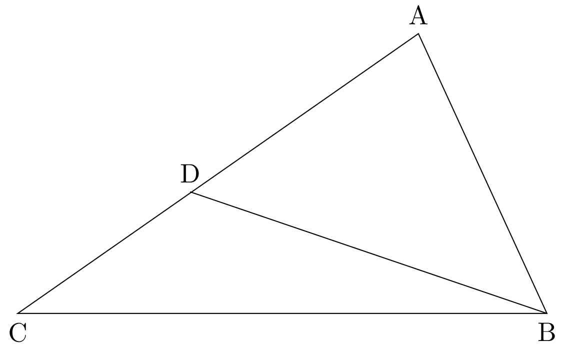
Výsledok: 448

Riešenie:

Zamyslíme sa, ktoré cifry môžme dať na miesto stovák, desiatok a jednotiek tak, aby tam nebola 2 ani 3. Na miesto stovák môžme dať všetky cifry okrem 0 (lebo potom by to nebolo trojciferné číslo), 2 a 3. Teda na miesto stovák môžme dať 7 rôznych cifier. Na miesto desiatok môžme už dať aj 0, takže máme na výber 8 rôznych cifier. To isté platí aj o jednotkách, že máme na výber 8 rôznych cifier. Trojciferných čísel, ktoré neobsahujú 2 ani 3 je potom dokopy $7 \cdot 8 \cdot 8$. Je to tak preto, lebo na každú z prvých 7 cifier čo si môžme vybrať existuje ďalších 8 možností, čo môžme dať na miesto desiatok, to je dokopy $7 \cdot 8$ možností. A ku každej jednej takejto kombinácii máme ešte 8 možností na poslednú cifru, čo je spolu $7 \cdot 8 \cdot 8 = 448$

Úloha 15:

Ratatujova kuchyňa má tvar trojuholníka ABC. O stenu AC oprie Ratatuj spotrebič D tak, že $|AB| = |AD|$, a $|\angle ABC| - |\angle ACB| = 30°$. Aký veľký je uhol DBC?



Výsledok: 15°

Riešenie:

Zo zadania vieme, že $\triangle DBA$ je rovnoramenný so základňou DB, teda $|\angle ABD| = |\angle ADB|$. Keďže vnútorný súčet uhlov v trojuholníku je 180°, tak

$$|\angle ABD| = |\angle ADB| = \frac{180^\circ - |\angle DAB|}{2} = 90^\circ - \frac{|\angle DAB|}{2}$$

Teraz sa pozrime na trojuholník $\triangle ABC$. Vieme, že

$$|\angle ACB| = 180^\circ - |\angle DAB| - |\angle ABC|$$

Zo zadania vieme, že $|\angle ABC| - |\angle ACB| = 30^\circ$. Za $|\angle ACB|$ nahradíme naše vyjadrenie pomocou $\triangle ABC$, čím dostávame

$$\begin{aligned}
|\angle ABC| - (180^\circ - |\angle DAB| - |\angle ABC|) &= 30^\circ \\
|\angle ABC| - 180^\circ + |\angle DAB| + |\angle ABC| &= 30^\circ \\
2 \cdot |\angle ABC| - 180^\circ + |\angle DAB| &= 30^\circ \\
2 \cdot |\angle ABC| &= 210^\circ - |\angle DAB| \\
|\angle ABC| &= 105^\circ - \frac{|\angle DAB|}{2}
\end{aligned}$$

Nakoniec si všimnime, že $|\angle DBC| = |\angle ABC| - |\angle ABD|$. Vyššie sme už zistili aj to, že, $|\angle ABC| = 105^\circ - |\angle DAB|/2$, aj to, že $|\angle ABD| = 90^\circ - |\angle DAB|/2$. Tieto dve zistenia použijeme na nahrádzanie:

$$\begin{aligned}
|\angle DBC| = |\angle ABC| - |\angle ABD| &= 105^\circ - \frac{|\angle DAB|}{2} - (90^\circ - \frac{|\angle DAB|}{2}) = \\
&= 105^\circ - \frac{|\angle DAB|}{2} - 90^\circ + \frac{|\angle DAB|}{2} = 105^\circ - 90^\circ = 15^\circ
\end{aligned}$$

Teda sme našli hľadanú hodnotu.

Úloha 16:

Na poli, kde kôň Rafael najradšej beháva, je päťciferný počet pšeničných klasov. Keby sme na koniec tohto čísla pripísali cifru 1, dostali by sme trojnásobok čísla, ktoré by sme získali pridaním cifry 1 na jeho začiatok. Koľko pšeničných klasov je na poli?

Výsledok: 42857

Riešenie:

Pomenujme si počet klasov $\overline{abcde}$, kde zápisom $\overline{abcde}$ myslíme číslo s ciframi a, b, c, d, e. Zo zadania vieme, že:

$$\begin{array}{r} \overline{1abcde} \\ \cdot\, 3 \\ \hline \overline{abcde1} \end{array}$$

Súčin $3 \cdot e$ musí končiť cifrou 1. Jediná cifra ktorej trojnásobok končí cifrou 1 je 7 ($3 \cdot 7 = 21$), preto $e = 7$.

Zvýšili nám 2 desiatky. Vieme, že $3 \cdot d + 2$ končí cifrou $e = 7$. Preto $3 \cdot d$ končí cifrou $7 - 2 = 5$. Jediná cifra, ktorej trojnásobok končí cifrou 5 je 5 ($3 \cdot 5 = 15$), preto $d = 5$.

Zvýšila nám 1 stovka. $3 \cdot c + 1$ končí cifrou $d = 5$. Vidíme, že $3 \cdot c$ bude končiť cifrou $5 - 1 = 4$. Pre c nám preto vyhovuje len cifra 8 ($3 \cdot 8 = 24$).

Zvýšili nám 2 tisícky. $3 \cdot b + 2$ končí cifrou $c = 8$. Vidíme, že $3 \cdot b$ bude končiť cifrou $8 - 2 = 6$. Pre b nám preto vyhovuje len $b = 2$ ($3 \cdot 2 = 6$).

Pri desaťtisíckach nemáme žiaden zvyšok, takže $3 \cdot a$ bude končiť cifrou $b = 2$. Vyhovuje len $a = 4$ ($3 \cdot 4 = 12$).

Zvýšila nám 1 stotisícka. Vidíme, že platí $3 \cdot 1 + 1 = 4 = a$, takže nájdené cifry naozaj spĺňajú podmienku zo zadania. Počet klasov na poli je teda 42857.

Úloha 17:

Pred ktoré číslo vo výraze $200 - 199 + 198 - 197 + \cdots + 4 - 3 + 2 - 1)$ s 200 číslami a pravou zátvorkou na konci má ježko Dežko umiestniť ľavú zátvorku tak, aby vyšiel výsledok 14?

Výsledok: pred 87

Riešenie:

Najprv si vypočítame hodnotu tohto výrazu bez zátvoriek. Pozrime sa len na znamienka mínus. Vždy odčítavame dve po sebe idúce čísla, čiže ich rozdiel bude vždy 1. Takýchto dvojíc s rozdielom 1 máme 100, a preto hodnota celého výrazu bude $100 \cdot 1 = 100$.

Teraz sa pozrime na to, kde môžeme umiestniť zátvorku a čo sa stane so súčtom. Ak umiestnime zátvorku pred číslo, pred ktorým bolo znamienko plus, tak sa nám s celkovým súčtom nič nestane. Je to preto, lebo pri sčítavaní nám nezáleží na poradí čísel, teda je jedno, či budeme sčítať zľava doprava, alebo najprv vypočítame výsledok v zátvorke a až potom ho pripočítame k číslam pred zátvorkou. Ak však zátvorku umiestnime pred číslo so znamienkom mínus, tak výsledok zátvorky budeme celý odčítavať od čísel pred zátvorkou. V takom prípade sa celý výsledok zmení. Dvojice s rozdielom 1 pred zátvorkou sa pripočítajú a dvojice v zátvorke sa odpočítajú.

Stačí nám už len zistiť koľko z dvojíc potrebujeme mať v zátvorke aby sme dostali výsledok 14. Máme ich 100 a potrebujeme ich pripočítať o 14 viac ako odpočítať, teda ich pred zátvorkou musí byť o 14 viac ako v zátvorke. To nám vyjde ak ich prirátame o 7 viac ako polovicu a odrátame o 7 menej ako polovicu. Odrátať ich teda potrebujeme $100 : 2 - 7 = 43$. Keďže každý rozdiel 1 sa skladá z dvoch čísel v našom výraze, tak potrebujeme začať odpočítavať od čísla $43 \cdot 2 = 86$. Pred číslom 86 je však plus, a preto zátvorku potrebujeme dať pred číslo 87, ktoré aj keď bude v zátvorke tak sa stále odčíta, čiže tam sa s rozdielom 1 v dvojici 88 a 87 nič nestane.

Ľavú zátvorku teda dáme pred číslo 87.

Úloha 18:

14 Rafaelových kamarátov si chcelo zahrať matematickú hru. Postavili sa do radu. Prvý kamarát v poradí povedal číslo 3, druhý číslo 7 a každý ďalší povedal súčet dvoch čísel pred ním. Keď posledný v rade povedal výsledok, piaty kamarát sa ospravedlnil, že povedal číslo o jedno menšie ako v skutočnosti malo byť. O koľko menšie bolo číslo, ktoré povedal posledný kamarát, oproti číslu, ktoré by povedal, ak by sa nikto nepomýlil?

Výsledok: 55

Riešenie:

Keďže piaty kamarát povedal číslo o 1 menšie, šiesty kamarát sčítal správne číslo štvrtého kamaráta a o jedno menšie číslo piateho kamaráta, teda aj jeho číslo bolo napokon o 1 menšie ako malo byť. Siedmy kamarát sčítal čísla piateho a šiesteho kamaráta, ktoré obe boli o 1 menšie ako mali byť, teda číslo siedmeho kamaráta bolo o 2 menšie ako malo byť.

Číslo ôsmeho kamaráta bude oproti číslu, ktoré by povedal ak by sa nikto nepomýlil, o 3 menšie, lebo sčítal čísla dvoch kamarátov pred sebou kde jedno bolo menšie o 1 a druhé o 2.

Deviaty kamarát povedal číslo o 5 menšie ako malo byť, pretože sčítal čísla kamarátov, pričom jeden z nich mal číslo o 2 menšie a druhý o 3 menšie.

Všimnime si, že každý ďalší kamarát povedal číslo menšie o toľko, o koľko boli čísla predchádzajúcich dvoch kamarátov menšie v súčte.

Preto desiaty kamarát povedal číslo o $5+3=8$ menšie, jedenásty kamarát číslo o $8+5=13$ menšie, dvanásty o $13+8=21$ menšie, trinásty o $21+13=34$ menšie a napokon posledný kamarát povedal číslo o $34+21=55$ menšie ako by povedal, ak by sa nikto nepomýlil.

Úloha 19:

Gazda Tadeáš má pole v tvare štvorcovej siete veľké 8×8. Koľko rôznych obdĺžnikov s pomerom strán $2:1$ alebo $1:2$ vie Tadeáš vytvoriť s tým, že vrcholy obdĺžnikov ležia v mrežových bodoch? (Obdĺžniky sú rôzne, ak sa líšia polohou alebo veľkosťou).

Výsledok: 228

Riešenie:

Keďže tabuľka má tvar štvorca, stačí nám spočítať obdĺžniky vo vertikálnom smere. V horizontálnom smere ich bude potom rovnako veľa. Tým pádom vieme povedať, že každý obdĺžnik je v tomto danom smere jednoznačne určený jeho rozmerom a jeho ľavým horným políčkom, ktorému hovorme *štartovné*.

Obdĺžniky s pomerom strán $1:2$ sú pre nás iba obdĺžniky 1×2, 2×4, 3×6 a 4×8 (väčšie by sa totiž do tabuľky 8×8 nevošli).

Pre obdĺžnik 1×2 môže byť jeho *štartovným* políčkom ľubovoľné políčko okrem tých v spodnom riadku. Keby totiž bolo *štartovné* políčko v spodnom riadku, nezmestilo by sa pod neho druhé políčko obdĺžnika. To nám dáva $64-8=56$ možných *štartovných* políčok, a teda 56 obdĺžnikov 1×2.

Pre obdĺžnik 2×4 môžu byť jeho *štartovným* políčkom iba políčka v prvých piatich riadkoch (aby sa do tabuľky vošli všetky jeho 4 riadky) a políčka v prvých siedmich stĺpcoch (aby sa do tabuľky vošli oba jeho stĺpce). To nám teda dáva ďalších $5 \cdot 7 = 35$ možných *štartovných* políčok.

Podobne pre obdĺžnik 3×6 môžu byť jeho *štartovným* políčkom iba políčka v prvých troch riadkoch a prvých šiestich stĺpcoch, čo je $3 \cdot 6 = 18$, a pre obdĺžnik 4×8 iba políčka v prvom riadku a prvých piatich stĺpcoch, čo je $1 \cdot 5 = 5$ ďalších *štartovných* políčok.

Spolu teda máme $56+35+18+5 = 114$ vertikálnych obdĺžnikov, čiže $114 \cdot 2 = 228$ obdĺžnikov celkovo.

Úloha 20:

Dedo koňa Rafaela pozeral večer v telke žrebovanie lotérie s kakaukom v ruke. Keď sa ráno zobudil, nepamätal si konkrétne vylosované číslo. Pamätal si však, že toto číslo $\overline{abc}$, v ktorom ani jedna cifra nie je nula, je deliteľné 3. Číslo $\overline{cbabc}$ je deliteľné 15 a $\overline{abcba}$ je deliteľné 8. Aké číslo $\overline{abc}$ bolo vylosované?

Zápis $\overline{abc}$ vyjadruje trojciferné číslo, ktoré má na mieste stoviek cifru a, na mieste desiatok cifru b a na mieste jednotiek cifru c.

Výsledok: 675

Riešenie:

Číslo $\overline{cbabc}$ je deliteľné 15, takže je deliteľné 3 aj 5. Čiže musí končiť 0 alebo 5, lenže 0 v tom čísle nie je, teda $c = 5$.

Číslo $\overline{abc}$ je deliteľné trojkou, a keďže 5 má zvyšok po delení tromi 2, tak $a + b$ musí mať zvyšok po delení 1, aby súčet všetkých spolu mal zvyšok 0. Z toho sa zasa vieme pozrieť na číslo $\overline{cbabc}$, kde $2 \cdot c = 2 \cdot 5 = 10$. 10 má zvyšok po delení trojkou 1, $a + b$ má tiež zvyšok po delení trojkou 1.

Ciferný súčet čísla $\overline{cbabc}$ má byť deliteľný trojkou, takže b musí mať zvyšok po delení trojkou 1. Vrátime sa k číslu $\overline{abc}$, kde c je 5, čo má zvyšok po delení trojkou 2 a zároveň b má zvyšok po delení trojkou 1. Teda a musí byť deliteľné trojkou. A tak a môže byť 3, 6 alebo 9.

Pozrieme sa na číslo $\overline{abcba}$, ktoré je deliteľné ôsmimi, čiže musí byť párne, z čoho vyplýva, že $a = 6$.

Ďalej b dáva zvyšok 1 po delení trojkou, takže to môžu byť čísla 1, 4, 7. Teraz sa už iba musíme pozrieť, ktorú cifru môžme dať do čísla $\overline{abcba}$ tak, aby bolo deliteľné ôsmimi. Na to nám stačí posledné trojčíslie. Čiže máme čísla 615, 645 a 675, z čoho iba 675 je deliteľné ôsmimi. Naše hľadané číslo je teda 675.

Úloha 21:

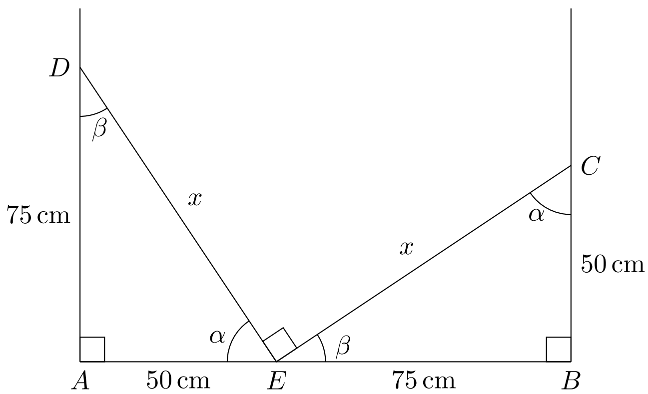
Ak Pingvin oprie rebrík o jednu stenu v chodbe sýpky, siaha do výšky 75 cm. Ak ho oprie z rovnakého miesta o druhú stenu oproti, siaha do výšky 50 cm. Aká je šírka chodby v centimetroch, ak uhol medzi rebríkmi v dvoch polohách je pravý?

Výsledok: 125

Riešenie:

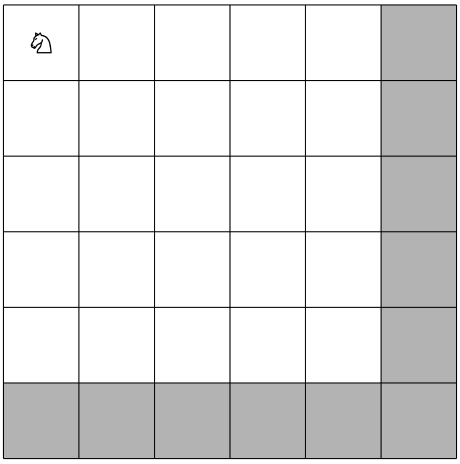
Zadanie si načrtneme a jednotlivé body označíme. Pozrime sa na uhol AED. Označme si ho ako α. Uhol BEC si označme ako β. Uhol AEB je priamy, a teda veľký 180°. Keďže je uhol DEC veľký 90°, platí, že $\alpha + \beta = 90°$. Uhly DAE a EBC sú pravé. Súčet vnútorných uhlov v trojuholníku je 180°. Keďže poznáme veľkosti uhlov CEB a EBC, vieme povedať, že veľkosť uhla ECB je α. V trojuholníku DAE vieme podobne dopočítať, že veľkosť uhla ADE je β.

Je dôležité si uvedomiť, že úsečky DE a CE sú rovnako dlhé. Môžeme si všimnúť, že trojuholníky AED a BCE majú rovnako veľké uhly a rovnako dlhú stranu. Preto sú tieto trojuholníky zhodné. To znamená, že dvojice strán AD, EB a AE a BC sú rovnako dlhé, čiže AE je dlhá 50 cm a EB je dlhá 75 cm. Úsečka AB je preto dlhá $50 + 75 = 125$ cm.



Úloha 22:

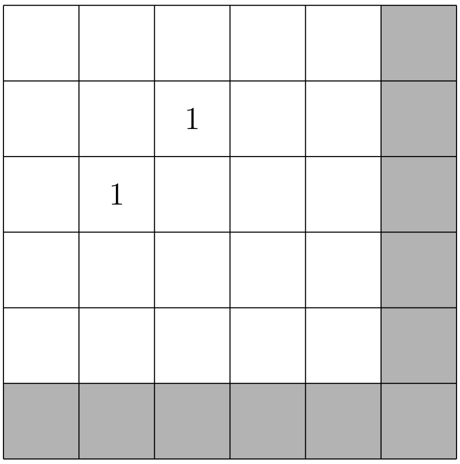
Kôň Rafael stál v rohu Chomikovského kráľovstva a chce sa dostať na bojové pole vyznačené sivou farbou, pričom sa hýbe ako jazdec v šachu (robí ťahy iba tak, že pôjde 2 políčka jedným smerom a jedno políčko smerom naň kolmým do tvaru písmena L). Koľkými spôsobmi to môže urobiť tak, aby to urobil na najmenší možný počet ťahov?



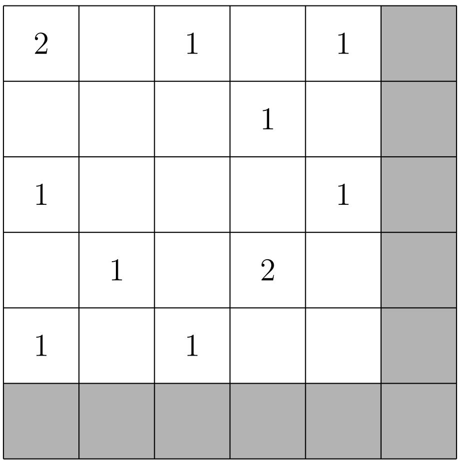
Výsledok: 18

Riešenie:

Najmenší možný počet ťahov na to, aby sa dostal na sivé políčko, je 3. Poďme si teda rozvetviť kde a koľkými spôsobmi sa dokáže jazdec dostať na tri ťahy. To urobíme tak, že v prvom kroku sa pozrieme na to, kde sa vie dostať z počiatočného políčka a do týchto nových políčok si zapíšeme, že sa do nich vedel dostať jedným spôsobom.



V druhom kroku sa pozrieme na to, kde sa dá dostať z týchto dvoch políčok. Tam, kde sa dá dostať iba z jedného z nich, si napíšeme jednotku, a tam, kde sa vie dostať z oboch, si napíšeme dvojku. Tieto čísla ukazujú počet všetkých možných ciest do daného políčka od začiatku, ktorá trvá dva ťahy.



A napokon zopakujeme ten istý postup aj pre tretí krok. Treba si ale dať pozor, pokiaľ skáčeme z políčka, kde máme napísanú 2, musíme aj do políčka, na ktorom skončíme, pripočítať 2, pretože na predposledné políčko sme mali 2 rôzne cesty a pridaním posledného skoku stále budú 2 rôzne. Keďže v tomto kroku sa už dostaneme na sivé políčka, ďalšie kroky nás nemusia zaujímať, preto si pre jednoduchosť môžeme zapisovať čísla iba do sivých políčok.

					2
					4
					3
2		4		3	

Takto máme v každom políčku napísaný počet rôznych ciest, ktoré do neho vedú a majú od začiatku tri ťahy. Zároveň vidíme, že až po troch skokoch sme sa dostali na sivé políčka. Teraz nám už stačí iba sčítať všetky čísla v sivých políčkach a dostaneme, že na najmenší možný počet ťahov sa na sivé políčko dá dostať 18 spôsobmi.

Úloha 23:

Ježko Dežko sa hrá v stodole so sirupmi. Najviac sa mu páči hrať sa s roztokom jablkového sirupu vo vode. V červenom vedierku má pred sebou 900 mililitrov 8% roztoku a v zelenom vedierku má 2 litre 96% roztoku. Koľko mililitrov má preliať zo zeleného do červeného vedierka, aby mu v červenom vznikol 60% roztok?

Výsledok: 1300

Riešenie:

Keď chceme, aby nám vznikol 60% roztok, musí tvoriť sirupová časť roztoku 60%. To znamená, že musí platiť:

$$\frac{objem\ sirupu\ v\ roztoku}{objem\ roztoku} = 60\% = 0,6$$

resp. $objem\ sirupu\ v\ roztoku = 0,6 \cdot (objem\ roztoku)$.

Množstvo 96% roztoku, ktoré Dežko preleje označme x. Platí teda, že preleje $0,96 \cdot x$ sirupu a objem finálneho roztoku bude $(900\,\mathrm{ml} + x)$. Zároveň vieme, že v červenom vedierku už je 900 ml 8% roztoku, čiže tam je $0.08 \cdot 900\,\mathrm{ml} = 72\,\mathrm{ml}$ sirupu.

Keď Dežko pridá k roztoku v červenom vedierku roztok zo zeleného vedierka, bude platiť:

$$\begin{gathered} 72\,\mathrm{ml} + 0,96 \cdot x = 0,6 \cdot (900\,\mathrm{ml} + x) \\ \Rightarrow 72\,\mathrm{ml} + 0,96 \cdot x = 540\,\mathrm{ml} + 0,6 \cdot x \\ \Rightarrow 0,36 \cdot x = 468\,\mathrm{ml} \\ \Rightarrow x = 1300\,\mathrm{ml} \end{gathered}$$

Dežko potrebuje preliať 1300 ml zo zeleného vedierka.

Úloha 24:

Koľko prvých po sebe idúcich celých kladných čísel treba sčítať, aby výsledkom bolo trojciferné číslo s tromi rovnakými ciframi?

Výsledok: 36

Riešenie:

Najprv poďme zistiť, ako si lepšie zapísať súčet prvých po sebe idúcich kladných čísel, teda súčet $1 + 2 + ... + n$. Zoberme si dva takéto súčty a druhý z nich napíšme odzadu. Potom si súčet týchto súčtov vieme po častiach napísať ako

$$(1 + n) + (2 + n - 1) + (3 + n - 2) + ... + (n + 1)$$

kde v každej dvojici je prvé číslo z prvého súčtu a druhé číslo z druhého. Každá z n dvojíc má teraz súčet $n+1$, čiže dvojnásobok $1+2+...+n$ je rovný $n(n+1)$. To znamená, že $1+2+...+n = n(n+1)/2$, čo sme presne hľadali.

Teraz si už len musíme uvedomiť, že každé trojciferné číslo s tromi rovnakými ciframi je násobkom 111. No a keďže prvočíselný rozklad 111 je $37 \cdot 3$, tak naše číslo je násobkom aj 37, aj 3.

Keď sa ale pozrieme na zápis nášho čísla v tvare $n(n + 1)/2$, tak určite buď n alebo $n + 1$ musí byť deliteľné 37. Pri 74 ($= 37 \cdot 2$) alebo väčšom násobku nám už však vyjde súčin väčší ako 1000, teda jedno z dvojice $n, n + 1$ bude naozaj rovné 37. Potom druhé číslo v súčine je buď 36 alebo 38, ale keďže potrebujeme aj deliteľnosť 3, tak musíme vybrať $n = 36$, $n + 1 = 37$. Potom je $n(n + 1)/2 = 36 \cdot 37/2 = 666$, čo spĺňa podmienku zo zadania.

Úloha 25:

Myšiak Ratatuj si zvolil 4 kladné celé čísla od 2 do 9 a potom na papier napísal všetky kladné celé čísla menšie ako 100, ktoré sú deliteľné aspoň jedným z vybraných čísel. Koľko najviac čísel mohol Ratatuj na papier napísať?

Výsledok: 77 (keď vyberie čísla 2, 3, 5, 7)

Riešenie:

Najskôr si uvedomíme, že keď chceme napísať čo najviac čísel, nemá zmysel voliť zložené čísla z výberu. Pretože pre každé zložené číslo z výberu platí, že ak by sme namiesto neho zvolili prvočíslo, ktorým je dané zložené číslo deliteľné, tak by Ratatuj na papier napísal tie isté čísla a ešte nejaké navyše. Napríklad nemá zmysel zvoliť číslo 4, pretože všetky čísla deliteľné 4 napíšeme aj keď namiesto 4 zvolíme 2, ale okrem toho napíšeme ešte nejaké ďalšie čísla. Vo výbere máme práve 4 prvočísla, a to 2, 3, 5 a 7. Zvolíme preto presne tieto 4 čísla.

Pretože sme zvolili 2, myšiak Ratatuj na papier napíše všetky párne čísla, ktorých je 49 (100 už nerátame). Ďalej vypíše všetky čísla, ktoré sú násobkom 3, tých je 33, ale musíme odčítať násobky 6, teda 16 čísel, ktoré napísal už pri zvolení 2. Pribudne teda 17 čísel. Potom vypíše násobky 5, ale iba také, ktoré nie sú deliteľné 2 ani 3, lebo tie už máme. To sú iba 5, 25, 35, 55, 65, 85 a 95, takže pribudne 7 čísel. Ako posledné vypíšeme násobky 7, ale opäť iba tie, ktoré nie sú deliteľné 2, 3 ani 5. To sú iba 7, 49, 77 a 91, čiže pribudnú ešte 4 čísla. Dokopy preto napíše $49 + 17 + 7 + 4 = 77$ čísel.

Úloha 26:

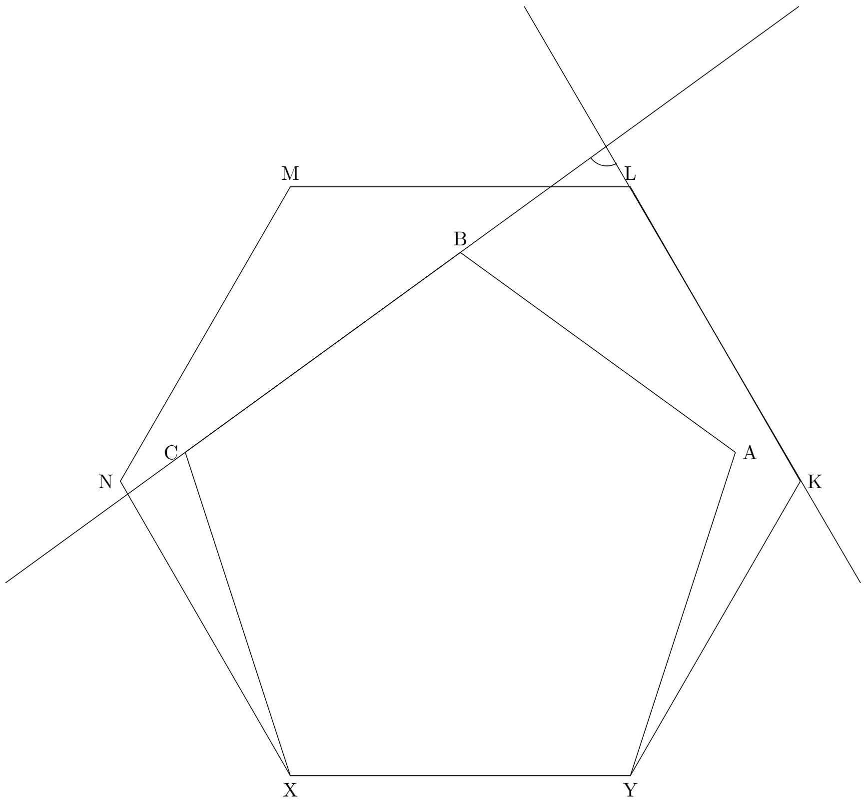
Gazda Tadeáš sa hral so steblami slamy. Nad steblom slamy v tvare úsečky XY urobil pravidelný päťuholník $XYABC$ a v rovnakej polrovine aj pravidelný šesťuholník $XYKLMN$. Aký uhol zvierajú priamky CB a KL?

Výsledok: $84°$

Riešenie:

Na výpočet tejto úlohy potrebujeme vedieť jednotlivé uhly v päťuholníku a šesťuholníku. Všeobecne vypočítame súčet veľkostí vnútorných uhlov v mnohouholníku ako $(n-2)\cdot 180°$, kde n je počet vrcholov.

Teda súčet veľkostí vnútorných uhlov v päťuholníku je $(5-2)\cdot 180° = 3\cdot 180° = 540°$. Keďže je pravidelný, tak má všetky uhly rovnaké, teda jeden jeho uhol bude mať veľkosť $540°/5 = 108°$. Súčet veľkostí vnútorných uhlov v šesťuholníku je $(6-2)\cdot 180° = 4\cdot 180° = 640°$. Šesťuholník je tiež pravidelný, takže jeden jeho uhol má veľkosť $640°/6 = 120°$.



Keď si načrtneme obidva útvary, tak nám vznikne päťuholník XYKLC, o ktorom vieme, že súčet veľkostí vnútorných uhlov má 540° a $|\sphericalangle LCX| = 108°$ aj $|\sphericalangle CXY| = 108°$, keďže sú to uhly pravidelného päťuholníka. Uhly XYK a YKL sú uhly pravidelného šesťuholníka, takže majú veľkosť 120°. Tieto 4 uhly majú dokopy $108° + 108° + 120° + 120° = 456°$.

Keďže všetkých 5 uhlov má mať spolu 540°, tak posledný uhol KLC má veľkosť $540° - 456° = 84°$.

Úloha 27:

Pingvin išiel vykradnúť banku a premýšľal nad počtom peňazí v trezoroch. Chcel zistiť, koľko existuje takých čísel s nenulovými ciframi, ktorých ciferný súčet je 8. Koľko takých čísel existuje?

Výsledok: 128

Riešenie:

Predstavme si ciferný súčet v hodnote 8 ako 8 jednotiek napísaných v rade za sebou. Následne už len tieto jednotky potrebujeme rozdeliť medzi cifry čísla všetkými možnými spôsobmi.

Všimnime si, že každé hľadané číslo s nenulovými ciframi vieme vyrobiť tak, že do medzier medzi týmito jednotkami umiestnime nejaký počet oddeľovačov. Počet jednotiek medzi dvomi oddeľovačmi bude potom zodpovedať hodnote danej cifry. Napríklad ak oddeľovače umiestnime do prvej, druhej a šiestej medzery, naše číslo bude tvaru 1-1-1111-11, teda 1142.

Už si len uvedomíme, že možných medzier je 7, keďže nemôžeme umiestňovať oddeľovače na začiatok ani koniec nášho radu jednotiek (potom by prvá alebo posledná cifra mala hodnotu 0). Zároveň podobne do každej medzery môžeme umiestniť najviac jeden oddeľovač. Keby tam totiž boli dva, počet jednotiek medzi nimi by bol rovný 0, a teda by sme opäť mali nulovú cifru. To znamená, že do každej zo siedmich medzier oddeľovač buď dáme alebo nedáme, čiže pre každý z nich máme nezávisle dve možnosti. Celkovo preto máme $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^7 = 128$ možností umiestnenia oddeľovačov, a teda aj 128 hľadaných čísel.

Úloha 28:

Počet balíkov sena, ktoré kôň Rafael zjedol po dlhom oraní na poli, je celé kladné číslo n. Toto číslo malo po vynásobení tromi hodnotu 999^{1000}. To znamená, že malo hodnotu $999 \cdot 999 \cdot 999 \ldots$ a takto tisíckrát za sebou napísané čísla 999, ktoré sú medzi sebou vynásobené. Akú cifru má číslo n na mieste jednotiek?

Výsledok: 7

Riešenie:

Keďže číslo n je po vynásobení tromi veľké 999^{1000}, jeho hodnotu získame, keď 999^{1000} vydelíme tromi. To znamená, že $n = 999^{1000}/3 = (999 \cdot 999^{999})/3 = 333 \cdot 999^{999}$.

Teraz sa pozrime na mocniny čísel, ktoré končia cifrou 9 – teda viacnásobné násobenie takých čísel. Keď násobíme nejaké 2 čísla, posledná cifra ich súčinu je ovplyvnená iba poslednými ciframi týchto dvoch čísel (predstavte si, ako sa násobí pod seba). Čiže sa nám stačí pozrieť na mocniny čísla 9.

Keď číslo 9 umocníme na prvú, dostaneme len 9. Ak číslo 9 umocníme na druhú, dostaneme $9 \cdot 9 = 81$. Keďže toto číslo končí cifrou 1, tretia mocnina čísla 9 bude končiť cifrou 9. Štvrtá mocnina bude tým pádom opäť končiť cifrou 1. Môžeme si všimnúť, že každá nepárna mocnina čísla 9 končí cifrou 9 a každá párna mocnina cifrou 1. Tieto podmienky platia aj pre mocniny čísel končiacich cifrou 9.

Číslo 999^{999} je nepárnou mocninou čísla 999, čiže musí končiť cifrou 9. Číslo n je rovné $333 \cdot 999^{999}$, čiže, ak vynásobíme 999^{999} ešte číslom, ktoré končí cifrou 3, dostaneme číslo, ktoré končí cifrou 7 (keďže $3 \cdot 9 = 27$ – číslo, ktoré končí cifrou 7) – teda číslo n končí cifrou 7.

Úloha 29:

Dĺžka trate dostihového okruhu je 400 m. Dva kone vybehli z jedného bodu súčasne v rôznych smeroch konštantnou rýchlosťou. Kôň Rafael má rýchlosť 5 km/h, kôň Casanova 7 km/h. Koľkokrát sa stretnú kone počas polhodinového závodu? Začiatok nepočítame ako stretnutie.

Výsledok: 15

Riešenie:

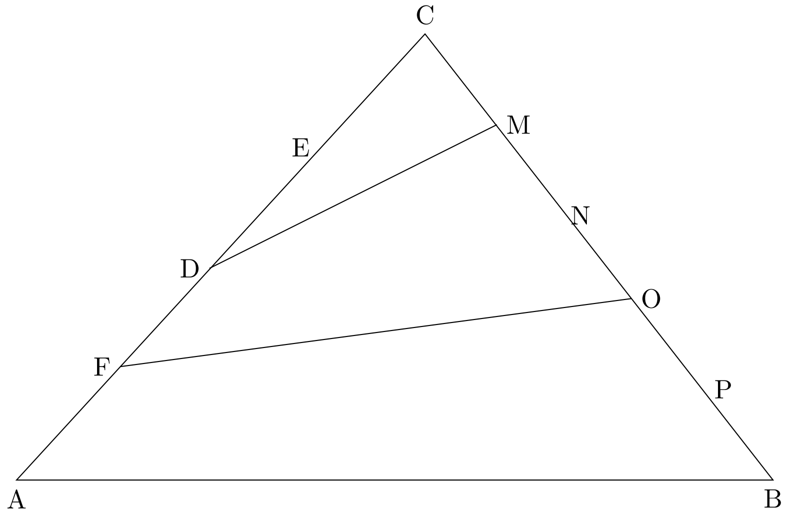
Pozrime sa na situáciu z pohľadu koňa Rafaela.

Keďže má rýchlosť 5 km/h a kôň Casanova má rýchlosť 7 km/h a kone sa k sebe navzájom približujú svojimi vlastnými rýchlosťami, vyzerá to z jeho pohľadu, akoby išiel kôň Casanova oproti nemu rýchlosťou 12 km/h. Za polhodinu teda z jeho pohľadu prešiel Casanova 6 km=6000 m.

Vzdialenosť, ktorú musí prejsť Casanova, aby sa dostal opäť k Rafaelovi je 400 m. Čiže sa stretli $6000/400 = 15$-krát.

Úloha 30:

Gazda Tadeáš má narodeninovú tortu v tvare trojuholníka ABC, kde stranu CA rozdelil na 4 rovnaké úseky a stranu BC na 5 rovnakých úsekov (ako na obrázku). Kôň Rafael mu ukradol kus torty $FOMD$. Ak obsah celej torty ABC je 40, aký je obsah útvaru $FOMD$, ktorý kôň Rafael zožral?



Výsledok: 14

Riešenie:

Všimnime si, že trojuholník CBD zdieľa výšku z bodu D s trojuholníkom CMD. A keďže zo zadania vieme, že úsek CB je 5-krát väčší od úseku CM, tak podľa vzorca na výpočet obsahu trojuholníka je obsah trojuholníka CBD 5-krát väčší od obsahu CMD.

Podobne si všimnime, že trojuholník CDB zdieľa výšku z bodu B s trojuholníkom DAB. A keďže je zo zadania úsek CD rovnako dlhý ako úsek DA, tak sú aj obsahy trojuholníkov CDB a DAB rovnaké, a to oba 5-krát väčšie ako CMD.

Vzhľadom na to, že sa obsah celého trojuholníka ABC skladá z obsahov CDB a DAB, tak je celkovo $5 + 5 = 10$-krát väčší ako CMD. Zo zadania je jeho obsah 40, z čoho vyplýva, že obsah CMD je $40/10 = 4$.

Keďže trojuholník MOD zdieľa výšku z bodu D s trojuholníkom CMD a zároveň je úsek MO 2-krát dlhší ako úsek CM, tak je aj obsah trojuholníka MOD 2-krát väčší ako CMD, a teda $4 \cdot 2 = 8$.

Takže obsah trojuholníka COD, skladajúceho sa z obsahov CMD a MOD, je spolu $4 + 8 = 12$.

A keďže trojuholník DFO zdieľa výšku z bodu O s trojuholníkom CDO a zároveň je úsek DF 2-krát kratší ako úsek CD, tak je aj obsah trojuholníka DFO 2-krát menší ako CDO, z čoho vyplýva, že $12/2 = 6$.

Zhrnutím dostávame, že obsah Rafaelovho útvaru $FOMD$, skladajúceho sa z obsahov trojuholníkov MOD a DFO, je spolu $8 + 6 = 14$.

Úloha 31:

Kôň Rafael ráta ovečky, aby večer zaspal čo najskôr. Počet ovečiek, ktoré napočítal, je najmenšie celé kladné číslo, ktorým musíme vynásobiť číslo 1224, aby sme dostali druhú mocninu celého kladného čísla. Druhú mocninu čísla x vypočítame ako $x \cdot x$. Určte počet ovečiek, ktorý napočítal.

Výsledok: 34

Riešenie:

Prvočísla z prvočíselného rozkladu pôvodného čísla sa budú nachádzať dvakrát v prvočíselnom rozklade druhej mocniny, teda sa nachádza v jeho prvočíselnom rozklade každé prvočíslo párny počet krát.

1224 má takýto prvočíselný rozklad: $1224 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 17$

Vidíme, že v prvočíselnom rozklade 1224 sa nachádzajú tri dvojky, druhá mocnina ich musí mať párny počet. Preto musíme 1224 vynásobiť dvojkou. Trojok je v prvočíselnom rozklade párny počet, trojkou preto 1224 násobiť nie je potrebné. Sedemnástka je v prvočíselnom rozklade 1224 len raz, druhá mocnina ich musí mať párny počet. Čiže musíme 1224 vynásobiť aj sedemnástimi. Zistili sme, že potrebujeme 1224 vynásobiť aj dvomi aj sedemnástimi. Keďže je najväčší spoločný deliteľ 2 a 17 jednotka, sú tieto čísla nesúdeliteľné. Najmenšie číslo, ktoré ich obe delí je preto práve ich súčin, a to 34.

Úloha 32:

Výbeh koňa Rafaela v tvare rovnobežníka $ABCD$ má obvod 60. Jeho výšky sú dlhé 6 a 14. Aká dlhá je kratšia z jeho strán?

Výsledok: 9

Riešenie:

Zo vzorca pre výpočet obsahu rovnobežníka $S = a \cdot v_a$, kde v_a označuje výšku na stranu a platí, že ak $v_a = 6$ a $v_b = 14$, potom $S = a \cdot v_a = 6a$ a $S = b \cdot v_b = 14b$, teda $6a = 14b$, z čoho vyplýva, že kratšia strana bude b (je v súčine s vyšším číslom, teda kvôli nepriamej úmere bude mať menšiu dĺžku). Rovnicu si môžeme upraviť aj na $14b - 6a = 0$.

Zároveň si môžeme zapísať obvod rovnobežníka ako $2a + 2b = 60$. Túto rovnicu môžeme vynásobiť tromi, čím dostávame $6a + 6b = 180$. Keď k tejto rovnici pripočítame predchádzajúcu rovnicu $14b - 6a = 0$, dostávame $20b = 180$, z čoho vyplýva $b = 180/20 = 9$.

Úloha 33:

Gazda Tadeáš napísal na papier šesť po sebe idúcich kladných celých čísel. Myšiak Ratatuj vypočítal poslednú číslicu súčinu prvých štyroch, škrečok Chomik poslednú číslicu súčinu posledných štyroch, kôň Rafael poslednú číslicu súčinu stredných štyroch. Ratatuj a Chomik dostali rovnaké výsledky. Rafael dostal iný. Aký?

Výsledok: 4

Riešenie:

Keďže máme šesť po sebe idúcich čísel, vieme, že určite aspoň jedno z nich je deliteľné číslom 5. Ak by toto číslo nebolo na kraji, tak by stredné a krajné zviera mali obe súčin končiaci nulou (lebo ak vynásobíme násobok čísla 5 a ľubovoľné párne číslo dostaneme násobok desiatky), a teda budú mať rovnakú poslednú číslicu, čo by odporovalo zadaniu. Ak by bol násobok čísla 5 na kraji, tak krajné zvieratá majú určite súčin, ktorý je násobkom 10 (čiže končí cifrou 0) a stredné zviera má určite súčin, ktorý nie je násobkom 10. Takže čísla budú buď končiace číslicami $0, 1, 2, 3, 4, 5$, alebo číslicami $5, 6, 7, 8, 9, 0$. A teda súčiny takých čísel budú v oboch prípadoch končiť číslicou 4 (lebo $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ a $6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 3024$).

Úloha 34:

Bobor Benedikt stojí na poľnej ceste v troch osminách jej dĺžky. K ceste sa blíži kombajn rýchlosťou 80 kilometrov za hodinu. Keď sa Benedikt rozbehne po ceste ľubovoľným smerom, stretne sa s kombajnom práve na konci cesty. Akou rýchlosťou beží bobor Benedikt?

Výsledok: $20\,\mathrm{km/h}$

Riešenie:

Keby bobor Benedikt bežal naproti kombajnu, ubehne tri osminy cesty a medzitým kombajn dorazí na začiatok cesty.

Ak by bežal smerom opačným, tak by stihol opäť prebehnúť tri osminy cesty, teda by došiel do šiestich osmín cesty, kým by kombajn prišiel ku začiatku cesty. Tu Benediktovi budú chýbať dve osminy cesty do konca, na ktorom sa stretnú, a kombajnu bude chýbať celá cesta. Teda za dobu, kedy bobor ubehne dve osminy, prejde kombajn cez celú cestu. Preto beží bobor Benedikt štvrtinovou rýchlosťou kombajna, teda $20\,\mathrm{km/h}$.

Úloha 35:

Gazda Tadeáš hrá kocky. V každom kole si hodí troma kockami a následne získa toľko peňazí, aký je súčet nižších dvoch hodených čísel a stratí toľko peňazí, aká je hodnota na najvyššej kocke. Aká je pravdepodobnosť, že po jednom kole bude mať aspoň o 3 peniaze viac ako na začiatku (v prípade, že je viac ako jedno najvyššie číslo, stále stratí peniaze len za jedno z nich a získa za zvyšné).

Výsledok: $34/216 = 17/108$

Riešenie:

Poďme systematicky prísť na všetky možnosti, v ktorých po jednom kole bude mať Tadeáš aspoň o 3 peniaze viac ako na začiatku.

Pokiaľ najvyššie hodené číslo bolo 6, musel na zvyšných dvoch kockách hodiť súčet 9 alebo viac. To sa dá pomocou súčtov $6+6$, $6+5$, $6+4$, $6+3$, $5+5$ a $5+4$. Nie každá z týchto trojíc má však rovnako spôsobov, akými môže byť hodená. Napríklad tri šestky sa dá hodiť iba jedným spôsobom, a to hodiť na všetkých kockách šestku. Pokiaľ máme 2 rovnaké čísla a jedno iné (ako v prípade 6, 6 a 5 či 6, 5 a 5), máme 3 spôsoby ako takúto kombináciu hodiť. Buď hodíme na prvej kocke rozdielne číslo a na druhej a tretej rovnaké, alebo hodíme rozdielne číslo na druhej kocke, alebo na tretej kocke. A pokiaľ máme až 3 rozdielne čísla (ako pri trojici 6, 5 a 4), máme až 6 spôsobov ako ich hodiť. Keď sa vrátime ku všetkým spôsobom, ako dostať najvyššiu kocku 6 a súčet na zvyšných dvoch aspoň 9, vypísaným vyššie, vieme si už zrátať, že to je dokopy $1+3+3+3+3+6 = 19$ vyhovujúcich možností hodenia troch kociek.

Pokiaľ najvyššie hodené číslo bolo 5, musel na zvyšných dvoch kockách hodiť súčet 8 alebo viac, a to pomocou čísel nie väčších ako 5. To sa dá pomocou súčtov $5+5$, $5+4$, $5+3$ a $4+4$. Znovu platí, že napr. 5, 5 a 5 sa dá hodiť iba jedným spôsobom, ale napr. 5, 4 a 4 až troma spôsobmi. S najvyšším číslom 5 máme dokopy $1+3+3+3 = 10$ možností.

Pokiaľ najvyššie hodené číslo bolo 4, musel na zvyšných dvoch kockách hodiť súčet 7 alebo viac, a to pomocou čísel nie väčších ako 4. To sa dá pomocou súčtu $4+4$ alebo $4+3$. Pre najvyššiu kocku 4 sú to teda ďalšie $1+3 = 4$ možnosti.

Pokiaľ najvyššie hodené číslo bolo 3, jediný spôsob, akým dostať zo zvyšných dvoch čísel súčet aspoň 6 tak, aby tieto čísla neboli väčšie ako 3, je $3+3$. Máme teda 34 možností.

Keby najvyššie číslo bolo 2, najvyšší súčet zvyšných dvoch je $2+2 = 4$, čo už nie sú 3 zarobené peniaze. Rovnako pre najvyššie číslo 1 máme iba možnosť $1+1 = 2$, čo tiež nie sú 3 zarobené peniaze. Našli sme teda všetky možnosti ako po jednom hode byť v zisku 3 peniaze.

Všetkých vyhovujúcich možností je 34. Na vyrátanie pravdepodobnosti potrebujeme vedieť ešte koľko je všetkých možností. To vyrátame jednoducho. Keďže máme 6 možností čo môže Tadeáš hodiť na prvej kocke, pre každú možnosť zase 6 možností, čo hodiť na druhej kocke a pre každú zo všetkých týchto zase 6 možností, čo hodiť na tretej kocke, všetkých možností je $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$. Pravdepodobnosť, že po jednom kole má o 3 peniaze viac ako na začiatku je preto $34/216 = 17/108$.

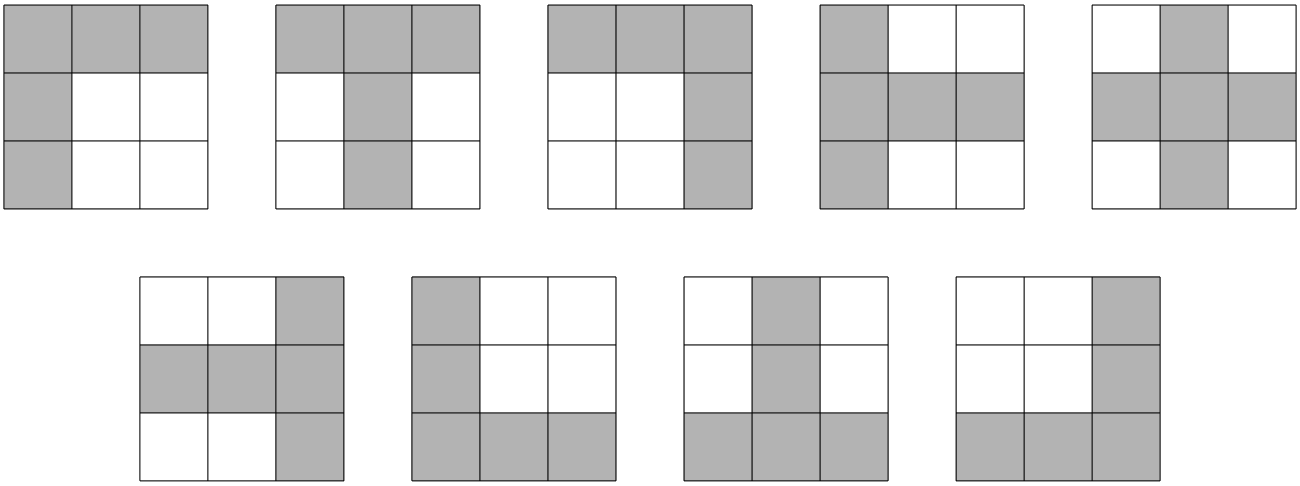
Úloha 36:

Tadeáš ráno omylom šliapol na hrable, ktoré ho trafili do hlavy a teraz si nepamätá, koľkými spôsobmi vie vyplniť tabuľku 3×3 číslami od 1 do 9 (každé použije práve raz) tak, aby súčet čísel v každom riadku aj v každom stĺpci bol nepárny. Koľko spôsobov existuje?

Výsledok: $9 \cdot 5! \cdot 4! = 25920$

Riešenie:

Aby bol súčet čísel v každom riadku aj stĺpci nepárny, je potrebné, aby v každom riadku aj stĺpci bol nepárny počet nepárnych čísel. Medzi číslami 1 až 9 sa nachádza 5 nepárnych čísel (1, 3, 5, 7, 9), čo sa dá do troch riadkov/stĺpcov na 3 nepárne počty rozdeliť iba na 1, 1, a 3. Z toho vyplýva, že práve jeden riadok a práve jeden stĺpec budú obsahovať iba nepárne čísla. Keďže máme 3 riadky a 3 stĺpce v tabuľke, dostávame $3 \cdot 3 = 9$ možných kombinácií umiestnení nepárnych čísel do tabuľky (viď. sivé políčka na obrázku nižšie).



Začnime do tabuľky umiestňovať najskôr nepárne čísla. V každom rozmiestnení nepárnych čísel do tabuľky máme 5 políčok, do ktorých môžeme nepárne čísla vkladať. Ak budeme čísla vkladať po poradí (1, 3, 5, 7, 9), máme 5 možností, kde dáme jednotku, 4 možnosti, kde dáme trojku a tak ďalej, až nám zostane iba jediné políčko, kde vieme umiestniť deviatku, preto do každej z variácií tabuľky vieme nepárne čísla umiestniť $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5!$ spôsobmi.

Podobne to bude fungovať aj pre párne čísla. Máme 4 políčka, kde môžme párne čísla vkladať, teda pre dvojku máme 4 možné políčka, pre štvorku 3 možné políčka a tak ďalej, teda dokopy môžme do každej z variácií tabuľky vpísať párne čísla $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4!$ spôsobmi.

Z vyššie uvedených výpočtov sme zistili, že máme 9 variácií tabuľky, 5! spôsobov, ktorými vieme do danej variácie tabuľky vpísať nepárne čísla a 4! spôsobov, ktorými vieme do danej variácie tabuľky vpísať párne čísla. Keď toto všetko spolu vynásobíme, dostaneme výsledok, teda do prázdnej tabuľky sa podľa stanovených pravidiel dajú čísla od 1 do 9 vpísať spolu $9 \cdot 5! \cdot 4! = 25920$ spôsobmi.

Úloha 37:

Gazda Tadeáš povedal koňovi Rafaelovi, že dostane na víkend voľno, ak nájde najväčšie trojciferné číslo n také, že n^2 po delení číslom 1000 dáva zvyšok n (pričom $n^2 = n \cdot n$). Aké číslo má Rafael povedať, aby dostal voľno?

Výsledok: 625

Riešenie:

Ak n^2 dáva zvyšok n po delení 1000, tak ak od n^2 odrátame n, musíme dostať číslo deliteľné 1000. Vieme teda, že číslo $n^2 - n$, ktoré vieme vybratím n pred zátvorku upraviť na $n(n-1)$, je deliteľné 1000. Keďže prvočíselný rozklad 1000 je $2^3 \cdot 5^3$, tak $n(n-1)$ musí byť deliteľné aj 5^3 aj 2^3. Nakoľko čísla n a $n-1$ sú po sebe idúce čísla, tak určite nie sú obe deliteľné 2 aj 5. Platí teda, že práve jedno z týchto dvoch čísel je deliteľné $5^3 = 125$ a práve jedno je deliteľné $2^3 = 8$. Zároveň to nemôže byť to isté číslo, lebo potom by to číslo bolo aspoň $2^3 \cdot 5^3 = 1000$, čiže by číslo n bolo viac ako trojciferné. Teraz sa postupne pozrieme na trojciferné násobky 125 a budeme skúmať či číslo o 1 väčšie alebo menšie je deliteľné 8.

- Najväčší trojciferný násobok 125 je 875, nakoľko ďalší násobok už je 1000 čo nie je trojciferné číslo. Čísla 874 a 876 však nie sú deliteľné 8 a preto táto možnosť nevyhovuje.

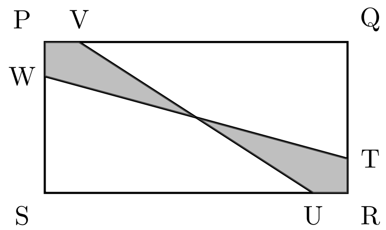
- Ďalší násobok 125 je 750. Druhé číslo musí byť nepárne a zároveň deliteľné 8. Také číslo zjavne neexistuje. Ani táto možnosť nevyhovuje.

- Ďalší násobok 125 je 625. Číslo 626 nie je deliteľné 8 ale číslo 624 už áno. Možnosť $n = 625$ by teda mala vyhovovať a naozaj $625^2 = 390625$, čo vyhovuje zadaniu.

Kôň Rafael má povedať číslo 625.

Úloha 38:

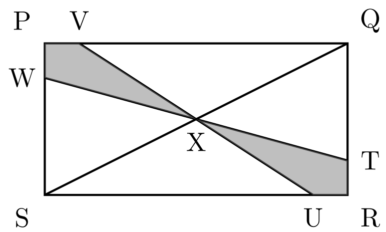
Gazda Tadeáš má kus plotu v tvare obdĺžnika $PQRS$ s rozmermi $|PS| = 2$ a $|PQ| = 4$, ktorý chce natrieť vzorom ako na obrázku. Body T, U, V, W sú umiestnené tak, že platí $|RT| = |RU| = |PW| = |PV| = a$. Ak úsečky VU a WT prechádzajú stredom obdĺžnika, pre akú hodnotu a je natretá oblasť $1/8$ z plochy obdĺžnika $PQRS$?



Výsledok: $\frac{1}{3}$

Riešenie:

Do obrázku si dokreslíme uhlopriečku SQ a bod, kde sa pretína s úsečkami VU a WT označme X:



Obsah natretej oblasti vieme vyjadriť ako obsah obdĺžnika $PQRS$ mínus obsah bielej časti. Chceme, aby natretá časť mala obsah rovný $1/8$ obsahu obdĺžnika $PQRS$. Čiže biela časť musí mať obsah rovný $7/8$ obsahu obdĺžnika – čiže 7. Obsah bielej časti vieme vypočítať ako súčet obsahov trojuholníkov SUX, QTX, QVX, SWX.

Trojuholníky SUX a QVX majú rovnaké obsahy, keďže oba majú základňu dlhú $4 - a$ a výšku dlhú 1 (polovica strany PS, keďže X je stredom štvorca). Oba majú teda obsah $(4 - a) \cdot 1/2 = (4 - a)/2$.

Trojuholníky QTX, SWX majú tiež rovnaké obsahy, keďže oba majú základňu dlhú $2 - a$ a výšku dlhú 2 (opäť preto, lebo X je stredom štvorca). Oba majú teda obsah $(2 - a) \cdot 2/2 = 2 - a$.

Obsah bielej časti je teda $2 \cdot (4 - a)/2 + 2 \cdot (2 - a) = 8 - 3a$. To vieme, že je rovné číslu 7, teda platí $a = 1/3$.

Úloha 39:

V kuríne mal gazda Tadeáš v prvom polroku kladný počet sliepok a podiel čiernych sliepok bol celý počet percent. Medzi polrokmi si gazda dokúpil 3 sliepky, z ktorých jedna bola čierna. Z pôvodných sliepok mu v kuríne ostali všetky. V druhom polroku bol podiel čiernych sliepok stále celý počet percent. Koľko najviac mohol mať gazda Tadeáš sliepok v kuríne v prvom polroku?

Výsledok: 197

Riešenie:

Po dokúpení sliepok máme 3 možnosti, ktoré sa nám mohli stať s percentom čiernych sliepok. Buď sa toto percento zväčšilo, zmenšilo alebo ostalo rovnaké. Zapíšme si podiel čiernych v prvom polroku ako c/s, kde c označuje čierne sliepky a s označuje všetky sliepky spolu. V druhom polroku sa nám tento zlomok teda zmení na $(c+1)/(s+3)$.

Pozrime sa najprv na prípad, kedy sa percento čiernych sliepok zväčšilo. Keďže vieme, že percento čiernych sliepok bolo v prvom aj druhom polroku celé číslo, muselo sa po dokúpení toto percento zväčšiť aspoň o 1 celé percento. To znamená, že celý zlomok sa musel zväčšiť aspoň o $1/100$. Teda zmenu po dokúpení si vieme napísať a následovne upraviť:

$$\frac{c+1}{s+3} - \frac{c}{s} \geq \frac{1}{100}$$

Odstránime menovatele vynásobením nerovnice $s(s+3)$. Vieme, že s je kladné číslo.

$$\begin{aligned} cs + s - cs - 3c &\geq \frac{s^2+3s}{100} \\ s - 3c &\geq \frac{s^2+3s}{100} \\ 100s - 300c &\geq s^2 + 3s \\ (97-s)s &\geq 300c \end{aligned}$$

Tu si môžeme všimnúť, že $300c$ bude kladné číslo alebo 0, nakoľko zo zadania vieme, že c je kladným celým číslom alebo 0. Preto s môže byť nanajvýš 97. To znamená, že najviac mohol mať Tomáš v prvom polroku 97 sliepok.

V druhom prípade, kedy sa percento čiernych sliepok zmenšilo, využijeme rovnakú myšlienku ako vyššie, a teda že sa zlomok musel zmenšiť aspoň o $1/100$:

$$\frac{c}{s} - \frac{c+1}{s+3} \geq \frac{1}{100}$$

Opäť prenásobime celú nerovnosť $s(s+3)$, pričom s je kladné číslo:

$$\begin{aligned} cs + 3c - cs - s &\geq \frac{s^2+3s}{100} \\ 300c - 100s &\geq s^2 + 3s \end{aligned}$$

Môžeme vydeliť s, keďže to je kladné číslo.

$$300\frac{c}{s} \geq s + 103$$

Teraz sa poďme zamyslieť nad touto nerovnosťou. Našou úlohou je maximalizovať s, teda aj pravú stranu nerovnosti (pretože hľadáme najväčší možný počet sliepok na začiatku). Tá je ale zhora obmedzená ľavou stranou. Preto zároveň chceme maximalizovať aj ľavú stranu. Na ľavej strane máme súčin, ktorého súčasťou je pomer c ku s. Aby sme maximalizovali celý tento súčin, chceme maximalizovať tento pomer. Najväčší možný, aký tento pomer môže byť, je 1, pokiaľ sa c a s rovnajú. Potom dopočítame:

$$\begin{aligned} 300 &\geq s + 103 \\ 197 &\geq s \end{aligned}$$

Sliepok najviac v prvom polroku teda mohlo byť 197, čo je viac ako v prvom prípade, kde ich mohlo byť iba 97. Pre lepšie pochopenie, čo by sa stalo, keby pomer c a s bol menší, si skúsme dosadiť napríklad jednu polovicu:

$$\begin{aligned} 300\frac{1}{2} &\geq s + 103 \\ 150 &\geq s + 103 \\ 47 &\geq s \end{aligned}$$

Vidíme, že so zmenšením pomeru sa zmenšilo maximum, ktoré s môže dosiahnuť. To by zjavne platilo pre každý pomer menší ako 1.

V treťom prípade, teda ak by sa percento čiernych sliepok medzi polrokmi nezmenilo, si vieme zostaviť nasledujúcu rovnosť:

$$\begin{aligned} \frac{c+1}{s+3} &= \frac{c}{s} \\ sc + s &= sc + 3c \\ s &= 3c \end{aligned}$$

To znamená, že c je tretinou s, čo je ale v spore zo zadaním, pretože z neho vieme, že počet čiernych sliepok má byť celým percentom, čo tretina zo 100 nie je. Teda táto možnosť nie je platnou.

Vidíme teda, že sme našli vyhovujúce riešenia iba v prvom a druhom prípade a z nich je väčšie to, kde sa percento čiernych sliepok v druhom polroku zmenšilo (druhý prípad). Poďme si ešte potvrdiť, že naozaj existuje prípad, kde ich mal v prvom polroku 197. Už sme si pri tomto prípade povedali, že toto maximum je možné iba v prípade, že pomer c a s je čo najväčší, takže 1. Čiže pokiaľ všetky sliepky v prvom polroku boli čierne. A naozaj, pokiaľ mal v prvom polroku 197 zo 197 čiernych sliepok, v druhom ich mal 198 z 200. V prvom to je 100% a v druhom 99%, čo sú oba celočíselné počty percent.

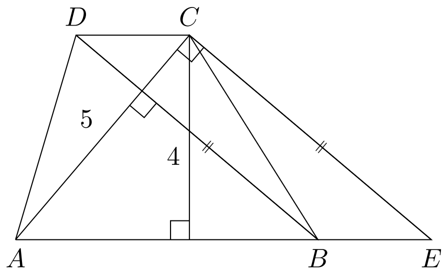
Úloha 40:

Na poli tvaru lichobežníka $ABCD$ takého, že uhlopriečky AC a BD sú na seba kolmé, si kôň Rafael zasadil ovos. Výška lichobežníka je 4, uhlopriečka AC má dĺžku 5. Určte obsah celého lichobežníkového poľa.

Výsledok: 50/3

Riešenie:

Najskôr predĺžme polpriamku AB a cez C veďme rovnobežku s uhlopriečkou DB. Bod, v ktorom táto rovnobežka pretne polpriamku AB, označme E. V trojuholníku AEC zo zadania vieme, že dĺžka strany AC je 5 a dĺžka výšky na stranu AE je 4.



Keďže štvoruholník $BECD$ je rovnobežník, tak jeho strany DC a BE sú rovnako dlhé. Preto AE má dĺžku rovnú súčtu dĺžok základní v lichobežníku $ABCD$. A keďže v trojuholníku AEC je výška na túto stranu AE totožná s výškou lichobežníka, majú trojuholník AEC a lichobežník $ABCD$ rovnaké obsahy. Pre vyriešenie úlohy nám teda stačí prísť na obsah trojuholníka AEC.

Tento obsah si vieme vyjadriť dvoma spôsobmi. Prvý je cez spomínanú základňu AE a výšku na ňu. Z toho dostaneme $S = (|AE| \cdot 4)/2$. Druhý spôsob využije to, že strany AC a EC sú na seba kolmé, pretože EC je rovnobežná s uhlopriečkou BD, ktorá je zo zadania kolmá na AC. Týmto spôsobom dostaneme $S = (|EC| \cdot 5)/2$. Teraz si dajme do rovnosti tieto dva spôsoby vyjadrenia obsahu a vyjadrime si $|AE|$:

$$\frac{|AE| \cdot 4}{2} = \frac{|EC| \cdot 5}{2}$$
$$|AE| \cdot 4 = |EC| \cdot 5$$
$$|AE| = \frac{5}{4}|EC|$$

Na záver využijeme pytagorovu vetu v celom trojuholníku AEC. Tá nam vraví, že $|AE|^2 = |EC|^2 + 5^2$. Do tohto dosadíme vyššie vyjadrené $|AE|$ a dopočítame:

$$|AE|^2 = |EC|^2 + 5^2$$
$$(\frac{5}{4}|EC|)^2 = |EC|^2 + 25$$
$$\frac{25}{16}|EC|^2 = |EC|^2 + 25$$
$$\frac{9}{16}|EC|^2 = 25$$
$$|EC|^2 = \frac{16 \cdot 25}{9}$$
$$|EC| = \frac{20}{3}$$

A keďže už vieme, že $S = (|EC| \cdot 5)/2$, tak obsah celého trojuholníka, a teda aj lichobežníka $ABCD$, je 50/3.

Hádanky

Hádanka 1:

Sedí pani v oranžovom kabátiku, vlasy má na slnci a telo má v chládku.

Výsledok: mrkva

Hádanka 2:

Čo precestuje celý svet ale vždy ostáva v rohu?

Výsledok: poštová známka

Hádanka 3:

Má šesť nôh a predsa po hlave chodí. Čo to je?

Výsledok: voš

Hádanka 4:

Otoč ma na bok a som všetko. Rozrež ma na polovicu a som nič. Čo som?

Výsledok: 8

Hlavolamy

Hlavolam 1:

Miloš pokrýva dosku takéhoto tvaru, zloženú z 10 políčok, štyrmi dielikmi veľkosti 2×1 (môžu sa otáčať). Aj keď sa snaží hocijako, niektoré z políčok vždy ostanú pokryté. Ktoré políčka to sú?

	1	
2	**3**	**4**
5	**6**	**7**
8	**9**	**10**

Výsledok: 3,5,7,9

Hlavolam 2:

Vyplňte magický štvorec (rovnaký súčet v každom riadku, stĺpci aj uhlopriečke) číslami 1 až 9 ak viete, že pre políčka označené písmenami platia nasledovné rovnice:

- $A \times D = 16$
- $B/C = 3$

A	**B**	
		C
		D

Výsledok:

2	**9**	**4**
7	**5**	**3**
6	**1**	**8**

Hlavolam 3:

Vyplňte mriežku po sebe idúcimi číslami od 1 do 16 tak, aby každé číslo nadväzovalo na predchádzajúce horizontálne, vertikálne alebo diagonálne.

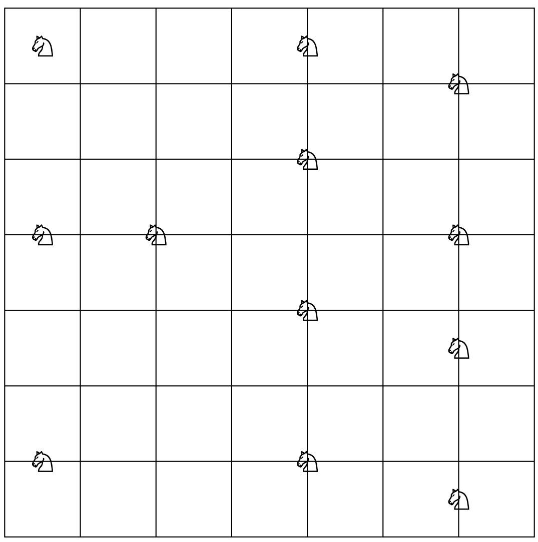
1			
		7	
	14		
			16

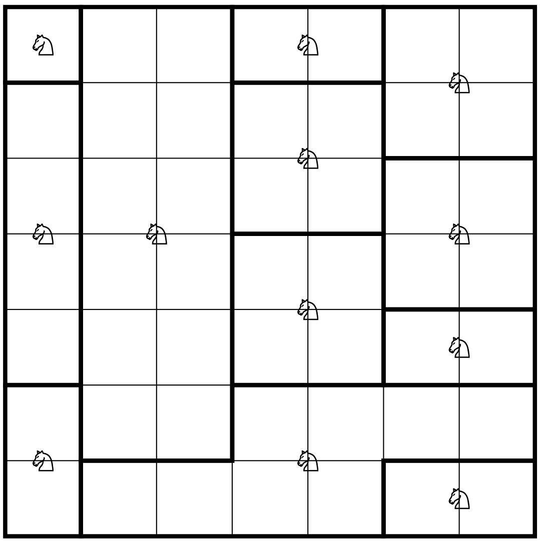
Výsledok:

1	**2**	**3**	**4**
9	**8**	**7**	**5**
10	**14**	**15**	**6**
11	**12**	**13**	**16**

Hlavolam 4:

Rozdeľte celú štvorčekovú sieť na ohrady pre kone. Hranice ohrád musia ísť po hranách štvorcovej siete a každé políčko musí byť vnútri nejakej ohrady. Zároveň v každej ohrade musí byť práve jeden kôň a tvar ohrady musí byť stredovo súmerný podľa koňa, ktorý je vnútri nej.



Výsledok: 

Lomihlav

Lomihlav je matematická súťaž organizovaná Združením STROM a Prírodovedeckou fakultou Univerzity Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach pre žiakov základných škôl a príslušných tried osemročných gymnázií. V roku 2024 sa koná už 23. ročník tejto súťaže.

Trvanie súťaže je magických 99 minút. Na začiatku každý tím dostane 6 matematických úloh a 1 bonus (vo forme hlavolamu alebo hádanky). Po úspešnom vyrátaní úlohy vymení tím úlohu za novú. Po každej pätici správne vyriešených úloh tím dostane jeden bonus (vo forme hlavolamu alebo hádanky). Bonus sa odovzdáva rovnako ako úloha, ale už zaň tím nedostáva novú úlohu, iba sa mu zarátavajú body.

Tímy získavajú body podľa ročníkov súťažiacich v tíme, a to podľa nasledovnej tabuľky:

Ročník				Správny výsledok	
1. žiak	2. žiak	3. žiak	4. žiak	úloha	bonus
7	7	7	7	3,80	2
7	7	7	8	3,70	2
7	7	7	9	3,60	2
7	7	8	8	3,60	2
7	7	8	9	3,50	2
7	7	9	9	3,40	2
7	8	8	8	3,50	2
7	8	8	9	3,40	2
7	8	9	9	3,30	2
7	9	9	9	3,20	2
8	8	8	8	3,40	2
8	8	8	9	3,30	2
8	8	9	9	3,20	2
8	9	9	9	3,10	2
9	9	9	9	3,00	2

Zadania starších ročníkov nájdete na `matik.strom.sk/sk/lomihlav`.

názov: **Lomihlav – 6.12.2024**
vydavatelia: Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach, Prírodovedecká fakulta
Združenie STROM
web: `matik.strom.sk/lomihlav`