



Ahoj!

Tvojmu pohľadu zjavne neuniklo ďalšie vydanie STROMu, v ktorom nájdeš nielen poradie po prvej sérii tohto semestra, ale aj naše vzorové riešenia. Nezabúdaj však, že sme ešte len v polčase, tak určite nepoľavuj a pusti sa do druhej série. S radosťou očakávame tvoje ďalšie riešenia!

STROMáci

Tábor mladých matematikov

Drahý riešiteľ, ak si prvák (alebo mladší) a premýšľaš, čo s časom počas letných prázdnin, máme pre teba dobré správy! Už vieme, kedy a kde sa bude konať TMM, teda Tábor mladých matematikov! V kalendári si rezervuj 20. až 27. júla 2025, pretože práve vtedy sa ocitneme na Chate Hámor pri Kokave nad Rimavicou na najúžasnejšej akcii roka. Pozvánku s odkazom na prihlasovanie nájdeš na stránke.

Nevieš, čo je TMM? Tábor mladých matematikov je ako sústreďenie, avšak je dlhšie, takže o toľko lepšie! Viac informácií a aj samotnú pozvánku a prihlasovanie nájdeš na <https://seminar.strom.sk/tmm/>.

1. Opravovali: **Kalista Semancová a Natália „Taly“ Poliačiková**
 Počet riešení: 42 Najkrajšie riešenie: **Ján Meteňko**



Kladné celé číslo voláme *Mihálovo*, ak každá dvojica susedných cifier je deliteľná buď číslom 19, alebo 21 (napríklad 7638 je *Mihálovo* číslo, lebo 76 je násobok čísla 19, 63 je násobok čísla 21 a 38 je násobok čísla 19). Koľko 2025-ciferných *Mihálových* čísel existuje?

Riešenie

Začnime tým, že si vypíšeme dvojice cifier, ktoré tvoria číslo deliteľné 19 alebo 21. Pre 19 sú to dvojice cifier 00, 19, 38, 57, 76, 95 a pre 21 sú to dvojice 00, 21, 42, 63, 84. Je však dôležité poznamenať, že dvojica cifier 00 sa v 2025-cifernom *Mihálovom* čísle určite nemôže vyskytnúť, pretože to je jediná dvojica obsahujúca nulu, a teda ak by sme ju umiestnili na hocikaké miesto v 2025-cifernom *Mihálovom* čísle, mohli by sme vytvoriť iba číslo zložené z 2025 núl, čo však, samozrejme, nepovažujeme za 2025-ciferné číslo.

Ďalej si môžeme všimnúť, že pre zvyšných 9 dvojíc cifier platí, že každá z cifier 1 až 9 sa nachádza na mieste desiatok aj na mieste jednotiek v práve jednej z dvojíc. To znamená, že ak si zvolíme niektorú z dvojíc, vieme jednoznačne určiť, ktorá dvojica musí nasledovať za ňou aj pred ňou (ak sa nenachádza na začiatku alebo na konci *Mihálovho* čísla). Dostávame tak cyklus toho, ako budú za sebou cifry nasledovať, konkrétne 1, 9, 5, 7, 6, 3, 8, 4, 2, 1, 9, 5 a tak ďalej.

Pre jednoznačné určenie 2025-ciferného *Mihálovho* čísla nám teda stačí určiť jeho prvú cifru – ďalšie už budeme môcť odvodiť z pravidla spomenutého vyššie, až dokým sa nedostaneme po 2025. cifru. Keďže vyberáme z cifier 1 až 9, na prvú pozíciu môžeme dať jednu z 9 možných cifier a existuje práve deväť rôznych 2025-ciferných *Mihálových* čísel.

Komentár

Väčšina mala riešenie super, iba vám chýbala dvojica cifier 00, o ktorej ste vôbec neuvažovali. Teda treba sa zamyslieť nad všetkými možnosťami.

2. Opravovali: **Matúš Libák a Ondrej Králik**
 Počet riešení: 33 Najkrajšie riešenie: **Filip Findorák**



Majme kladné celé čísla $1 < x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_{2025}$. Pre $i \in \{1, 2, \dots, 2025\}$ definujeme

$$m_i = \left(x_1 - \frac{1}{x_1}\right) \left(x_2 - \frac{1}{x_2}\right) \dots \left(x_i - \frac{1}{x_i}\right).$$

Najviac koľko z čísel $m_1, m_2, m_3, \dots, m_{2025}$ môže byť celých?

Riešenie

Najprv ukážeme, že m_1 nemôže byť celé: Totiž $m_1 = x_1 - 1/x_1$, pričom x_1 je kladné celé číslo väčšie ako 1. To znamená, že $1/x_1$ musí byť tiež kladné, ale menšie ako 1, teda nie celé. Takže aj ich rozdiel musí byť nie celý.

Teraz indukciou dokážeme, že ostatné členy m_i budú celé a v tvare $m_i = c_i \cdot (i+2)$, kde $c_i \in \mathbb{Z}$, pre prípad $x_i = i+1$: Všetky naše x_i zjavne spĺňajú podmienku v zadaní. Naše členy si upravíme:

$$x_i - \frac{1}{x_i} = \frac{x_i^2 - 1}{x_i} = \frac{(x_i - 1) \cdot (x_i + 1)}{x_i} = \frac{i \cdot (i+2)}{i+1}$$

Indukčný predpoklad pre $i = 2$:

$$\begin{aligned} m_2 &= m_1 \cdot \frac{i \cdot (i+2)}{i+1} \\ m_2 &= \frac{1 \cdot 3}{2} \cdot \frac{2 \cdot (i+2)}{3} \\ m_2 &= 1 \cdot (i+2) \\ m_2 &= 4 \end{aligned}$$

V tomto prípade $c_2 = 1$, a teda m_2 je v požadovanom tvare.

Indukčné tvrdenie:

$$\begin{aligned} m_{i+1} &= m_i \cdot \left(x_{i+1} - \frac{1}{x_{i+1}}\right) \\ m_{i+1} &= c_i \cdot (i+2) \cdot \frac{i+1 \cdot (i+3)}{i+2} \\ m_{i+1} &= c_i \cdot (i+1) \cdot (i+3) \end{aligned}$$

Keďže $i+1$ je celé číslo, môžeme povedať, že $c_{i+1} = c_i \cdot (i+1)$, a zachovať platnosť $c_{i+1} \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} m_{i+1} &= c_{i+1} \cdot (i+3) \\ m_{i+1} &= c_{i+1} \cdot ((i+1) + 2) \end{aligned}$$

Teda sme dokončili indukciu.

Pri našej postupnosti od x_1 do x_{2025} pre každé $i > 1$ platí, že $m_{i+1} \in \mathbb{Z}$. Takže až 2024 čísel m_i môže byť celých.

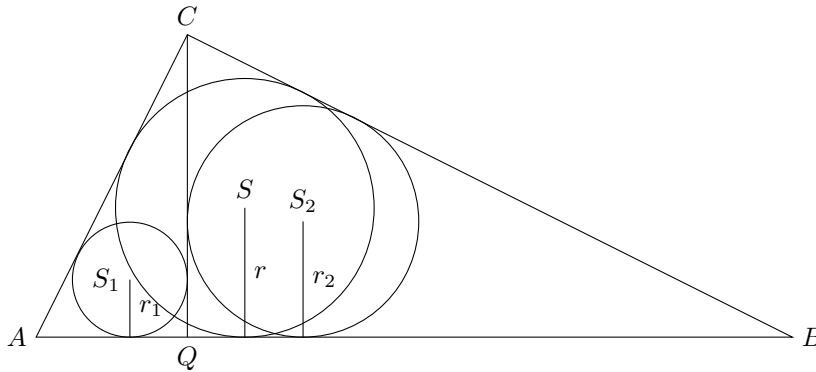
3. Opravovali: **Mírka Horváthová a Rišo Vodička**
Počet riešení: 38 Najkrajšie riešenia: **Michal Ferdinandy a Tomáš Sukeľ**



V pravouhlom trojuholníku ABC je Q päta výšky z vrcholu C na preponu AB . Polomery kružníc vpísaných do trojuholníkov ABC , AQC a QBC označme zaradom r , r_1 , r_2 . Dokážte, že $|CQ| = r_1 + r_2 + r$.

Riešenie

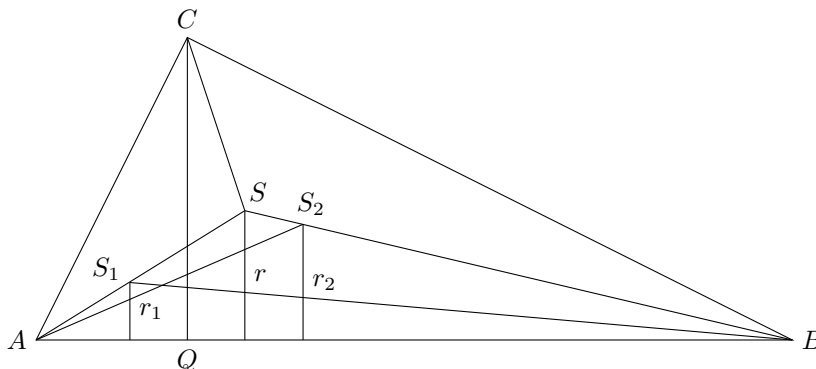
Označme si stredy kružníc vpísaných do trojuholníkov ABC , AQC a QBC postupne S , S_1 a S_2 .



Uvedomme si, že obsah trojuholníka ABC vieme vypočítať ako $|AB| \cdot |CQ|/2$. To znamená, že ak chceme ukázať, že $|CQ| = r_1 + r_2 + r$, stačí nám dokázať, že $|AB| \cdot (r_1 + r_2 + r)/2 = |AB| \cdot |CQ|/2$, čo je obsah trojuholníka ABC . Ľavú stranu tejto rovnosti si vieme roznásobiť a rozdeliť na súčet viacerých zlomkov $|AB| \cdot r_1/2 + |AB| \cdot r_2/2 + |AB| \cdot r/2$.

V trojuholníku ABS je kolmica z vrcholu S na stranu AB polomerom kružnice vpísanej do trojuholníka ABC , čiže má dĺžku r . Zároveň je však výškou v tomto trojuholníku, a teda obsah trojuholníka ABS vieme vyrátať ako $|AB| \cdot r/2$. Podobne dokážeme, že $S_{ABS_1} = |AB| \cdot r_1/2$ a $S_{ABS_2} = |AB| \cdot r_2/2$. Ak sa vrátíme teraz k rovnosti, ktorú sa snažíme dokázať, zistíme, že nám už stačí ukázať len, že $S_{ABS} + S_{ABS_1} + S_{ABS_2} = S_{ABC}$.

Úsečky AS , BS a CS nám rozdelia trojuholník ABC na tri trojuholníky ABS , BCS a CAS .



Trojuholníky ACQ a ABC sú podobné, lebo majú jeden spoločný uhol pri vrchole A a oba sú pravouhlé. Podobnosť trojuholníkov dáva do rovnakého pomeru nielen dĺžky strán, ale aj veľkosti polomerov kružníc do nich vpísaných. Platí teda $|AB|/|AC| = r/r_1$, z čoho po vynásobení celej rovnice $|AC|$ a r_1 plynie $|AB| \cdot r_1 = |AC| \cdot r$. Vieme, že $S_{ABS_1} = |AB| \cdot r_1/2$, a podobným spôsobom vieme zistiť, že $S_{CAS} = |AC| \cdot r/2$. Keďže $|AB| \cdot r_1 = |AC| \cdot r$, tak $S_{ABS_1} = S_{CAS}$.

Analogicky bude aj $S_{ABS_2} = S_{BCS}$. Dosadením do dokazovanej rovnosti dostávame $S_{ABS} + S_{ABS_1} + S_{ABS_2} = S_{ABS} + S_{CAS} + S_{BCS} = S_{ABC}$, čo platí, lebo ako sme už povedali, trojuholník ABC je rozdelený na trojuholníky ABS , BCS a CAS .

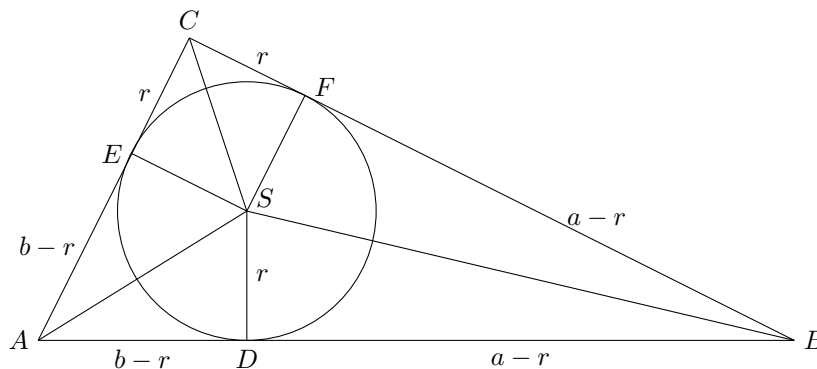
Iné riešenie

Pozrime sa na trojuholník ABC a jeho vpísanú kružnicu. Označme si body dotyku tejto kružnice so stranami AB , AC a BC postupne D , E a F a jej stred S .

Úsečka CS je osou uhla ACB , a preto uhly SCE a SCF majú rovnakú veľkosť. Trojuholníky CSE a CSF budú zhodné, keďže okrem tejto dvojice rovnako veľkých uhlov majú spoločnú stranu CS a pravý uhol pri vrchole E a F . Teda $|CE| = |CF|$. Okrem toho je však uhol ACB pravý, čiže uhly ECS a FCS majú 45° . Ľahko dopočítame, že aj uhly CSE a CSF majú 45° . Trojuholníky CSE a CSF sú preto rovnoramenné a z toho $|CE| = |CF| = r$.

Analogicky vieme dostať aj rovnosti $|AD| = |AE|$ a $|BD| = |BF|$. Ak si označíme strany trojuholníka klasicky a , b , c , tak dostaneme, že $|AD| = |AE| = b - r$ a $|BD| = |BF| = a - r$. Z toho dostávame, že $c = a - r + b - r$, a keď si vyjadríme r , tak máme, že $r = (a + b - c)/2$.

Pri dokazovaní sme nepoužili žiadne iné vlastnosti trojuholníka ABC ako to, že je pravouhlý, a teda tento vzorec bude platiť pre každý pravouhlý trojuholník s odvesnami a a b , preponou c a polomerom vpísanej kružnice r .



V našej úlohe máme tri pravouhlé trojuholníky s ich vpísanými kružnicami. Sú to trojuholníky ABC , ACQ a BCQ . Podľa nášho vzorca si vieme vyjadriť každý z polomerov r , r_1 , r_2 a dostaneme, že

$$r + r_1 + r_2 = \frac{|AC| + |BC| - |AB|}{2} + \frac{|AQ| + |CQ| - |AC|}{2} + \frac{|BQ| + |CQ| - |BC|}{2} = \frac{|AQ| + |BQ| - |AB| + 2|CQ|}{2}.$$

Zjavne však $|AQ| + |BQ| = |AB|$, čiže $r + r_1 + r_2 = \frac{2|CQ|}{2} = |CQ|$, čo je to, čo sme chceli dokázať.

Komentár

Mnohí z vás riešili túto úlohu druhým zo spôsobov a o vzorci $r = (a + b - c)/2$ len povedali, že platí. V tejto úlohe sme za nedokázanie tohto vzorca nestrhávali body, no chceme vás týmto motivovať, aby ste sa nabudúce v riešeníach zamysleli, či by nejaký taký vzorec nebolo potrebné aj dokázať. Predsa len tento vzorec nie je až tak známy a v inej úlohe sa za to pokojne body sťahovať môžu.

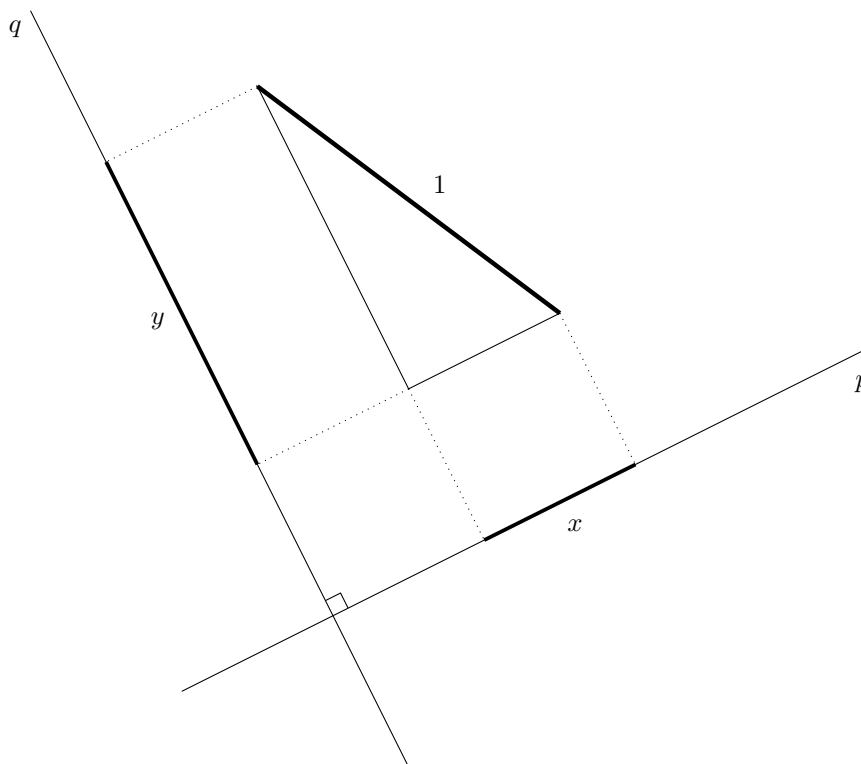
4. Opravovali: **Martin „Šmili“ Šmilňák a Ľubo Vargovčík**
 Počet riešení: 22 Najkrajšie riešenie: **Oliver Seman**



Nech k je kružnica s celočíselným polomerom r , vo vnútri ktorej sa nachádza $4r$ úsečiek dĺžky 1. Daná je priamka p . Dokážte, že existuje priamka p' rovnobežná s p alebo kolmá na p taká, že p' pretína aspoň 2 z daných úsečiek dĺžky 1.

Riešenie

Zvoľme ľubovoľnú priamku kolmú na p a nazvime ju q . Ďalej uvažujme ľubovoľnú úsečku dĺžky 1 a jej kolmé priemety na priamky p a q . Ich dĺžky si nazvime x a y .



Keď posunieme kolmé priemety úsečky k jej koncom, vidíme, že dĺžky x a y sú zároveň dĺžkami odvesien pravouhlého trojuholníka s preponou dĺžky 1. Z trojuholníkovej nerovnosti tak vyplýva, že $x + y \geq 1$ (rovnosť by nastala v extrémnom prípade, keď by bola úsečka rovnobežná s jednou z priamok).

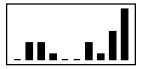
V úlohe máme $4r$ takýchto úsečiek dĺžky 1. Keď teda sčítame dĺžky kolmých priemetov všetkých z nich na priamky p a q , dostaneme aspoň $4r$. Z toho plynie, že pre aspoň jednu z priamok p a q musí platiť, že súčet dĺžok priemetov na ňu je aspoň $2r$ (ak by toto neplatilo, súčet priemetov na p a q dokopy by bol menej ako $4r$).

Ďalej si uvedomme, že všetky kolmé priemety úsečiek na jednu z priamok musia ležať na úseku dĺžky $2r$, keďže $2r$ je dĺžka priemetu celej kružnice k na ľubovoľnú priamku a úsečky sa nachádzajú v jej vnútri. Ak si teraz zoberieme priamku, pre ktorú platí, že súčet dĺžok priemetov úsečiek na ňu je aspoň $2r$, tak vieme, že tieto priemety sa niekde musia pretnúť. Existuje teda bod na jednej z priamok, ktorý patrí priemetom aspoň dvoch rôznych úsečiek. Kolmica na túto priamku vedená daným bodom potom pretína obe tieto úsečky. Zároveň je určite kolmá alebo rovnobežná s p . Našli sme priamku spĺňajúcu obe podmienky zo zadania a tým je úloha dokázaná.

Komentár

Väčšina dostala správny nápad, že treba robiť priemety do dvoch na seba kolmých priamok tak, ako je popísané vo vzorovom riešení. Často ste však nepovažovali zdieľanie koncových bodov za prienik, teda že priamka, ktorá by cez taký bod prechádzala, by prechádzala cez dve úsečky, čo vám zbytočne prinieslo prácu navyše.

5. Opravovali: **Lucia Chladná a Erik „Riči“ Novák**
 Počet riešení: 25 Najkrajšie riešenie: **Oliver Seman**



Nájdite všetky usporiadané desatice reálnych čísel $(x_1, \dots, x_{10})$ také, že

$$x_i = 1 + \frac{6x_i^2}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2 + x_9^2 + x_{10}^2}$$

pre všetky $i \in \{1, \dots, 10\}$.

Riešenie

Začnime dokázaním, že $x_i > 1$.

Určite $x_i \geq 1$, keďže v pôvodnej rovnici je zlomok na pravej strane nezáporný. To preto, lebo v čitateli aj menovateli má iba druhé mocniny (ktoré sú samostatne aj v súčte nezáporné), z čoho pričítaním 1 dostávame požadovaný odhad pre ľavú stranu, že $x_i \geq 1$.

Keďže $x_i \geq 1$, tak $x_i > 0$, $6x_i^2 > 0$, a teda náš zlomok je aj kladný, čiže odhad ľavej strany je ostrý a naozaj $x_i > 1$. To znamená, že $x_i - 1 > 0$ a týmto číslom môžeme v celom riešení bezproblémovo deliť.

Najprv zistíme hodnotu $\sum_{i=1}^{10} x_i$. (Zápis $\sum_{i=j}^k X_i$ znamená súčet všetkých X_i pre index v rozmedzí od j po k , teda napríklad $\sum_{i=1}^3 i^2 = 1 + 4 + 9$ alebo $\sum_{i=2}^4 x_i = x_2 + x_3 + x_4$). Získame ju sčítaním rovníc zo zadania pre všetky hodnoty i :

$$\sum_{i=1}^{10} x_i = \sum_{i=1}^{10} \left(1 + \frac{6x_i^2}{\sum_{i=1}^{10} x_i^2}\right) = 10 + \frac{\sum_{i=1}^{10} 6x_i^2}{\sum_{i=1}^{10} x_i^2} = 10 + 6 = 16$$

Teraz si z rovnakej rovnice vyjadríme sumu druhých mocnín pomocou x_i :

$$\begin{aligned} x_i - 1 &= \frac{6x_i^2}{\sum_{i=1}^{10} x_i^2} \\ \sum_{i=1}^{10} x_i^2 &= \frac{6x_i^2}{x_i - 1} \end{aligned}$$

Ľavá strana tejto rovnice ostáva rovnaká pre všetky i :

$$\forall i \in \{2, \dots, 10\} : \frac{6x_i^2}{x_i - 1} = \frac{6x_1^2}{x_1 - 1}$$

Pre všetky indexy je tým pádom tento výraz rovnaký ako pre x_1 . Upravme túto rovnicu:

$$\begin{aligned} \frac{x_i^2}{x_i - 1} &= \frac{x_1^2}{x_1 - 1} \\ x_i^2(x_1 - 1) &= x_1^2(x_i - 1) \\ x_i^2 x_1 - x_i^2 &= x_i x_1^2 - x_1^2 \\ x_i^2 x_1 - x_i x_1^2 &= x_i^2 - x_1^2 \\ x_i x_1(x_i - x_1) &= (x_i + x_1)(x_i - x_1) \end{aligned}$$

Teraz máme pre každé i dve možnosti. Buď $x_i = x_1$, alebo $x_i - x_1 \neq 0$, a teda môžeme rovnicu vydeliť $x_i - x_1$:

$$\begin{aligned} x_i x_1 &= x_i + x_1 \\ x_i &= \frac{x_1}{x_1 - 1} \end{aligned}$$

Všetky x_i sú teda len dvoch tvarov: rovné x_1 a rovné $x_1/(x_1 - 1)$. Ostáva zistiť, koľko ich máme ktorého typu. Nech z týchto 10 premenných je k rovných x_1 (zrejme $k \geq 1$). Vieme, že súčet všetkých premenných je 16, takže môžeme zostaviť takúto rovnicu:

$$\begin{aligned} k \cdot x_1 + (10 - k) \cdot \frac{x_1}{x_1 - 1} &= 16 \\ kx_1^2 - kx_1 + 10x_1 - kx_1 &= 16x_1 - 16 \\ kx_1^2 - (2k + 6)x_1 + 16 &= 0 \end{aligned}$$

Táto rovnica musí mať riešenia, čiže aj nezáporný diskriminant. Vyjadriť si ho:

$$\begin{aligned} D &= (2k + 6)^2 - 4 \cdot 16 \cdot k \geq 0 \\ 4k^2 + 24k + 36 - 64k &\geq 0 \\ k^2 - 10k + 9 &\geq 0 \\ (k - 1)(k - 9) &\geq 0 \end{aligned}$$

Tieto dve zátvorky musia byť obe nekladné alebo obe nezáporné. Ak sú obe nezáporné, tak $k \geq 9$ a následne $k = 9 \vee k = 10$, a ak sú obe nekladné, tak $k \leq 1$, a teda $k = 0 \vee k = 1$. Z nich nám podľa úvahy vyššie vyhovujú len prvé tri, a to 10, 9, 1. Rozoberme ich:

1. Nech $k = 10$. Potom sú hodnoty všetkých čísel rovné x_1 , a keďže ich súčet je 16, tak všetky $x_i = 16/10 = 1,6$. Ľahko overíme, že takáto desatica naozaj vyhovuje.
2. Nech $k = 9$. Dosadíme do rovnice vyššie:

$$\begin{aligned} 9x_1^2 - 24x_1 + 16 &= 0 \\ (3x_1 - 4)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Teda $x_1 = 4/3$ a $x_1/(x_1 - 1) = 4$. V skutočnosti máme 9 riešení (to jedno $x_i = 4$ môže byť ktorékoľvek okrem x_1). Ľahko overíme, že aj všetky takéto desatice naozaj fungujú.

3. Nech $k = 1$. Dosadíme:

$$\begin{aligned} x_1^2 - 8x_1 + 16 &= 0 \\ (x_1 - 4)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Teda $x_1 = 4$ a $x_1/(x_1 - 1) = 4/3$. To je vďaka $k = 1$ jediné riešenie, ktoré po overení aj naozaj funguje.

Riešením sú teda práve desatice $(1,6; 1,6; \dots; 1,6)$ a $(4/3; 4/3; \dots; 4/3; 4)$ pre desať možných pozícií čísla 4.

Komentár

Mnohým riešeniam sme strhli bod za neoverenie podmienky, či je možné deliť výrazom $x_i - 1$. Hoci v tejto úlohe to veľký efekt nemalo, chceme vás tým motivovať k zodpovednejšiemu prístupu k overovaniu takýchto podmienok a rozoberaniu prípadov, keď by dané podmienky neboli splnené. Pri inej úlohe by vás takáto chyba mohla stáť netriviálny kus riešenia a tým aj viacej bodov.

6. Opravovali: Michal „Iľo“ Iľkovič a Branislav Ječim Počet riešení: 12 Najkrajšie riešenie: Eva Krajčiová



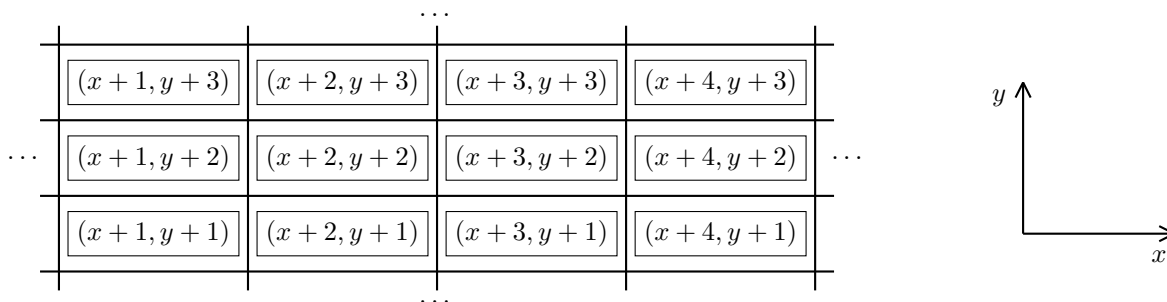
Majme nekonečnú štvorcovú mriežku s n zafarbenými políčkami. V každom kroku sa pre každé políčko pozrieme na farbu samotného políčka, políčka hneď hore a políčka hneď vpravo. Ak sú aspoň dve z týchto troch políček zafarbené, v ďalšom kroku bude toto políčko zafarbené, inak biele. Ukážte, že mriežka bude celá biela

- po konečnom počte krokov,
- po najviac $2n$ krokoch,
- po najviac n krokoch.

Riešenie

Biele riadky a stĺpce znamenajú také, ktorých všetky políčka sú biele, a zafarbené riadky a stĺpce znamenajú také, ktoré obsahujú aspoň jedno zafarbené políčko. Zavedieme si súradnicovú sústavu, kde jednotlivé štvorčeky sú mrežové body (stred súradnicovej sústavy môže byť ľubovoľné políčko).

Pod klesajúcou diagonálou chápeme množinu mrežových bodov s rovnakým súčtom súradníc x a y (napr. v obrázku nižšie je jedna z klesajúcich diagonál množina políček $\{(x+2, y+3), (x+3, y+2), (x+4, y+1)\}$, pretože súčet súradníc každého z nich je $x+y+5$).



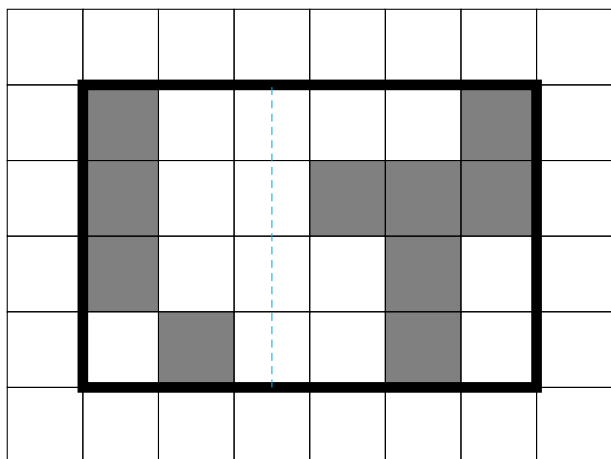
Keďže je na začiatku iba konečný počet zafarbených políček, tak existuje najpravejší a najľavejší zafarbený stĺpec a najspodnejší a najvrchnejší zafarbený riadok. Tieto riadky a stĺpce určujú ohraničujúci obdĺžnik. Teraz dokážeme, že bez ohľadu na počet krokov, ktoré spravíme, nikdy nebude môcť existovať zafarbené políčko mimo ohraničujúceho obdĺžnika.

Uvedomíme si, že ak je nejaký riadok celý biely, tak už v ňom po žiadnom ťahu nebude môcť byť zafarbené políčko. Keby to tak nebolo, tak by sme vedeli nájsť také políčko v bielom riadku, ktoré je biele, ale o ťah neskôr bude zafarbené. Z toho vyplýva, že susedné políčka nad ním aj napravo od neho musia byť obe zafarbené, čo je ale spor s tým, že celý riadok je biely. Analogicky platí pre biely stĺpec. To dokazuje, že nemôže existovať zafarbené políčko mimo ohraničujúceho obdĺžnika.

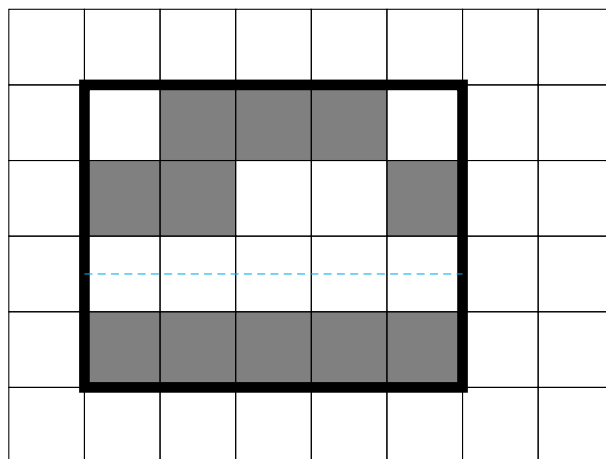
- Všimnime si, že ak je klesajúca diagonála, na ktorej sú mrežové body so súčtom súradníc S , celá biela, tak v nasledujúcom ťahu bude klesajúca diagonála s mrežovými bodmi so súčtom súradníc $S-1$ celá biela. To platí, lebo všetky body na tejto diagonále $S-1$ majú svojich horných a pravých susedov bielych. Nech je súčet súradníc pravého horného políčka v ohraničujúcom obdĺžniku S . Keďže v ohraničujúcom obdĺžniku je iba konečný počet klesajúcich diagonál a klesajúca diagonála so súčtom $S+1$ je celá biela, tak po konečnom počte ťahov bude celá mriežka biela.
- Zavedieme indukciu. Nech pre všetky počty k zafarbených políček menších ako n je ohraničujúci obdĺžnik (a teda aj celá mriežka) celý biely po najviac $2k$ krokoch. Ukážeme, že tvrdenie platí aj pre n . Indukčná báza je prípad $n=1$, pre ktorý je mriežka celá biela po jednom ťahu. Ak je vnútri ohraničujúceho obdĺžnika nejaký biely riadok, alebo stĺpec, tak vieme rozbiť ohraničujúci obdĺžnik na dva menšie (viď obr. 1 a obr. 2), ktoré budú mať každý menej ako n zafarbených políček, takže by bola celá mriežka biela po menej ako $2n$ ťahoch. Ak nie je vnútri ohraničujúceho obdĺžnika žiaden biely riadok ani stĺpec, tak je počet riadkov aj stĺpcov v ohraničujúcom obdĺžniku najviac n . Klesajúcich diagonál prechádzajúcich obdĺžnikom je teda najviac $2n-1$ (toľko je rôznych súčtov súradníc mrežových bodov), takže celá mriežka bude biela po najviac $2n$ ťahoch, čím je dôkaz dokončený.
- Podobne ako v časti b zavedieme indukciu, iba tentokrát ešte trochu silnejšiu. Nech pre všetky počty k zafarbených políček menších ako n je celá mriežka biela po najviac k krokoch. Ukážeme, že tvrdenie platí aj pre n . Indukčná báza je rovnaká, teda prípad $n=1$, pre ktorý je mriežka celá biela po jednom ťahu. Celú mriežku vieme rozdeliť na oblasti štvorčekov podľa bielych riadkov, bielych stĺpcov a bielych klesajúcich diagonál (viď obr. 1, obr. 2 a obr. 3), pričom každá oblasť sama o sebe má menej ako n zafarbených štvorčekov, takže každá oblasť bude podľa indukčného predpokladu biela za menej ako n krokov. To platí kvôli tomu, že dve zafarbené políčka z rôznych oblastí po žiadnom

kroku nemôžu spolu susediť stranou, pretože ak je medzi dvomi oblasťami na začiatku biely riadok alebo stĺpec, tak tam ostane aj po ľubovoľnom počte krokov, a ak bola medzi dvomi oblasťami na začiatku klesajúca diagonála, tak medzi nimi ostane aj po ľubovoľnom počte krokov. Ostáva už iba vyriešiť prípad, keď existuje iba jedna oblasť s n zafarbenými políčkami. To znamená, že touto oblasťou neprechádza žiaden biely riadok, biely stĺpec ani biela klesajúca diagonála (viď obr. 4). Takže všetky zafarbené políčka sa nachádzajú vo vnútri oblasti s najviac n klesajúcimi diagonálami, ale zároveň v oblasti s najviac n riadkami a stĺpcami a táto oblasť bude celá biela zaručene za najviac n krokov, čo sme mali dokázať.

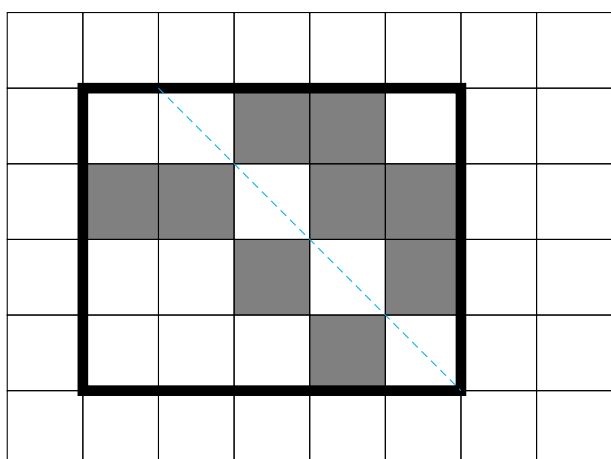
obr. 1



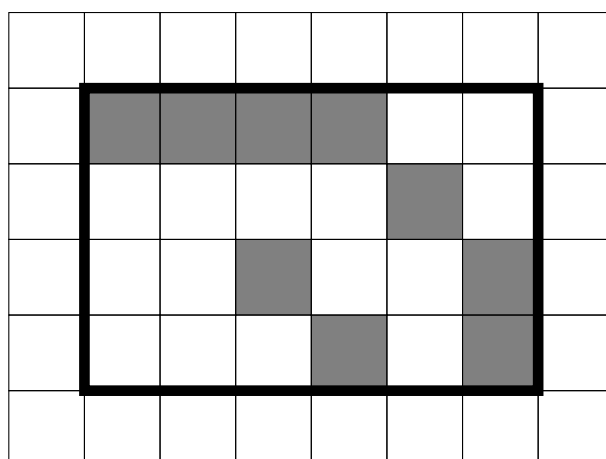
obr. 2



obr. 3



obr. 4



Komentár

Ako prvé chceme osloviť a motivovať riešiteľov, ktorí túto úlohu ani neskúsili riešiť. Myslíme si, že aspoň podúlohu a by zvládla vyriešiť väčšina z vás, ale opäť sa ukázalo, že šiestu úlohu si bohužiaľ mnohí ani len neprečítajú. Čo sa týka vašich riešení, viacerí ste explicitne neriešili podúlohu b, ale ak potom riešená podúloha c nebola korektná a zároveň z nej nevyplývalo ani tvrdenie b, museli sme strhnúť body za obe časti. Preto vám do budúcnosti odporúčame riešiť každú podúlohu zvlášť aj za cenu väčšieho úsilia, keďže to môže priniesť viac bodov.

Zadania úloh letného semestra 49. ročníka

Nezabudni si vytvoriť či aktualizovať profil na seminar.strom.sk.

2 Druhá séria

Termín odovzdania riešení: **28. apríla 2025**

Ak nevieš pohnúť ďalej s niektorou z úloh, skús sa pozrieť na pár tipov, ktoré nájdeš na našej webovej stránke seminar.strom.sk/media/uploads/mohlobysahodit.pdf.

1. Majme ostrouhlý trojuholník ABC s najdlhšou stranou AC . Zostrojte na tejto strane bod D taký, že os uhla ADB bude rovnobežná so stranou BC . Svoju konštrukciu popíšte a zdôvodnite jej korektnosť.
2. Martin a Robka hrajú hru v tabuľke 1×2025 . Martin si najprv na papier napíše niekoľko kladných celých čísel. Robka vloží mincu do jedného z políčok. V každom ťahu si Martin vyberie číslo, ktoré má napísané na papieri – o toľko políčok sa pokúsi Robka posunúť mincu buď doľava, alebo doprava (podľa svojho rozhodnutia, ale ak je možné mincu presunúť, presunie ju, inak ostáva na nezmenenej pozícii). Koľko najmenej čísel si Martin musí napísať na papier, aby vedel zaistiť, že minca navštívi všetky políčka bez ohľadu na to, akým spôsobom hrá Robka?
3. Dokážte, že pre všetky kladné celé čísla n platí, že počet deliteľov čísla n končiacich cifrou 1 alebo 9 je rovnaký alebo väčší ako počet deliteľov čísla n končiacich cifrou 3 alebo 7.
4. Pre každé kladné celé číslo k väčšie ako 1 nech $p(k)$ je najväčší prvočíselný deliteľ čísla k . Dokážte, že existuje nekonečne veľa celých čísel n väčších ako 2 takých, že

$$(p(n+1) - p(n))(p(n) - p(n-1)) > 0.$$

5. Nech k je pevná kružnica so stredom S a polomerom r . Nech B a C sú dva rôzne pevné body na k . Nech A je pohyblivý bod na k , odlišný od B a C . Nech P je bod taký, že stred úsečky SP je A . Priamka prechádzajúca bodom S a rovnobežná s priamkou AB pretína priamku prechádzajúcu bodom P a rovnobežnú s priamkou AC v bode D .
 - a. Dokážte, že keď sa bod A pohybuje po kružnici k (okrem bodov B a C), bod D leží na pevnej kružnici, ktorej polomer je väčší alebo rovný r .
 - b. Dokážte, že rovnosť v časti a. nastane práve vtedy, keď je úsečka BC priemerom kružnice k .
6. Dokážte, že pre všetky kladné celé čísla $x < y$ platí

$$\frac{y^y}{x^x(y-x)^{(y-x)}} > \frac{y!}{x!(y-x)!} > \frac{y^y}{x^x(y-x)^{(y-x)}(y+1)}.$$

Poradie po 1. sérii letného semestra 49. ročníka

Poradie	Meno a priezvisko	Ročník	Škola	1.	2.	3.	4.	5.	6.	H	CS
1. - 4.	Richard Semanišín	Z8	GAlejKE	9	9	9	9	9	4	0	54
	Magdaléna Škriabová	S1	GPoštKE	9	9	9	9	9	3	0	54
	Eva Krajčiová	S3	GAlejKE	9	9	9	9	9	9	0	54
	Ján Metencko	S1	GPoštKE	9	9	9	9	9	3	0	54
5. - 6.	Oliver Seman	S3	GAlejKE	8	9	9	9	9	9	0	53
	Richard Futáš	Z8	ZPAngKE	9	8	9	9	8	9	0	53
7.	Michal Vodička	S2	GAlejKE	8	9	9	9	8	5	0	51
8.	Gregor Černický	S1	GPoštKE	9	9	9	5	9	3	0	50
9. - 10.	Michal Ferdinandy	S2	GPoštKE	8	9	9	2	9	5	0	48
	Šimon Nalevanko	S1	GPoštKE	9	9	9	5	7	1	0	48
11. - 12.	Richard Prikler	S2	GJARMPO	9	9	9	2	9	-	0	47
	Tomáš Sukeľ	S3	GAGLSHE	8	9	9	9	9	3	0	47
13.	Nina Hudáková	S1	GAlejKE	8	9	8	7	6	-	0	46
14.	Alenka Bálintová	S2	BGMHSuč	8	9	9	9	-	-	0	43
15.	Filip Findorák	S3	GŠrobKE	8	9	9	8	8	-	0	42
16.	Martina Osuská	S2	GJHN3BA	7	9	9	9	-	-	0	41
17.	Lívia Lukáčová	S1	GŠrobKE	8	9	8	-	6	-	0	39
18. - 19.	Martin Dudjak	S3	SMLádPP	8	9	9	9	1	-	0	36
	Lukáš Dankanin	S1	GPoštKE	9	-	9	9	-	-	0	36
20. - 23.	Jakub Stramba	S1	GŠrobKE	8	9	4	-	6	-	0	35
	Alena Chladná	Z9	GAMČABA	8	9	9	-	-	-	0	35
	Lívia Sušková	S1	GPoštKE	8	9	9	-	-	-	0	35
	Samuel Šandor	S3	GPoštKE	9	9	9	-	8	-	0	35
	Sophia Sotáková	S1	GAGLSHE	8	8	9	1	-	-	0	34
25.	Sarah Klopstock	S2	ŠpMNDaG	8	1	9	8	3	-	0	32
26.	Marie Kasalová	S1	GJGJPha	8	6	9	-	-	-	0	31
27.	Michal Revický	Z9	GJARMPO	8	5	7	-	1	-	0	28
28.	Jakub Tomasz	Z8	ZKro4KE	8	9	-	-	2	-	0	27
29.	Veronika Jakabová	S3	GAlejKE	8	9	9	-	-	-	0	26
30. - 31.	Adam Horváth	Z8	GAlejKE	8	9	-	-	-	-	0	25
	Martin Vrba	S2	GPoštKE	8	-	9	-	8	-	0	25
32.	Janka Urbánová	S2	GAlejKE	8	9	5	0	-	-	0	22
33.	Ondrej Tóth	S2	SPITKM	8	2	1	8	-	1	0	21
34. - 35.	Matej Kurbel	S3	GAMerTT	8	6	5	-	1	-	0	20
	Jakub Katrák	Z9	ZPoliKE	8	-	6	-	-	-	0	20
36. - 37.	Nina Anna Betáková	S3	GAGLSHE	8	6	3	-	2	-	0	19
	Zoja Poliaková	S3	GJGTBB	8	-	9	-	2	-	0	19
38.	Lukáš Paška	S1	GPoštKE	8	-	5	-	-	-	0	18
39.	Lucia Šebová	S2	GPoštKE	8	-	9	-	-	-	0	17
40.	Tomáš Lang	S2	SPTechSN	8	-	8	-	-	-	0	16
41. - 42.	Daniel Ryan Takáč	S1	GAlejKE	8	-	-	-	-	-	0	8
	Filip Feher	Z8	ZPAngKE	8	-	-	-	-	-	0	8

Názov:	STROM – korešpondenčný matematický seminár Číslo 5 • Apríl 2025 • Letný semester 49. ročníka (2024/2025)
Web:	seminar.strom.sk
E-mail:	seminar.strom@strom.sk
Riešenia:	Prijímame odovzdaním na webe a v prípade poruchy stránky na adrese riesenia.strom@strom.sk .
Vydáva:	Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice
Web:	zdruzenie.strom.sk
E-mail:	info@strom.sk

*Organizačný poriadok korešpondenčných matematických seminárov Malynár, Matik, STROM je zaregistrovaný na
Ministerstve školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky pod číslom 2017/13750:2-10B0.*