STROM
Korešpondenčný matematický seminár

Ahoj!

Je tu ďalší časopis STROMu, ktorý prináša vzorové riešenia druhej série. Okrem toho, že je posledný v tomto semestri, je výnimočný aj tým, že s ním prichádzajú aj pozvánky pre tých najlepších z vás (teda, časom snáď). Tí sa môžu tešiť na odmenu vo forme týždňového netradičného sústredenia v obklopení skvelými účastníkmi a vedúcimi. Ak sa ti tam tentoraz nepodarilo dostať, nezúfaj. Pevne veríme, že nabudúce sa s tebou uvidíme!

STROMáci

Tábor mladých matematikov

Ak premýšľaš, čo s časom počas najbližších letných prázdnin, a si prvák, máme pre teba dobré správy! Už vieme, kedy a kde sa bude konať TMM, teda Tábor mladých matematikov! V kalendári si rezervuj 29. júla až 5. augusta 2024, pretože práve vtedy sa ocitneme v Rekreačnom stredisku Zelený breh na najúžasnejšej akcii roka.

Nevieš, čo je TMM? Tábor mladých matematikov je ako sústredenie, avšak je o 2 dni dlhšie, takže o 2 dni lepšie! Viac informácií a samotnú pozvánku s prihlasovaním nájdeš na `https://seminar.strom.sk/tmm/`.

1.

Opravovali: **Bianka Gurská a Matúš Masrna**
Počet riešení: 22 Najkrajšie riešenia: **všetky 9-bodové**

Nech prvých 5 členov postupnosti je $1, 2, 3, 4$ a 5. Od šiesteho člena ďalej platí, že každý člen postupnosti sa rovná súčinu všetkých predchádzajúcich členov mínus 1. Dokážte, že súčin prvých 70 členov postupnosti sa rovná súčtu ich druhých mocnín.

Riešenie

Označme si všeobecne n-tý člen postupnosti ako a_n. Potom si každý člen pre $n > 5$ podľa zadania môžeme rozpísať ako $a_n = a_{n-1} \cdot a_{n-2} \cdot \dots \cdot a_1 - 1$. Potom ak navyše aj $n - 1 > 5$, teda $n > 6$, platí, že $a_{n-2} \cdot \dots \cdot a_1 = a_{n-1} + 1$. Takže vieme povedať, že $a_n = a_{n-1}(a_{n-1} + 1) - 1 = {a_{n-1}}^2 + a_{n-1} - 1$.

Takisto si môžeme prepísať aj súčin prvých 70 členov ako $a_{71}+1$, a to podľa rozpísania vyššie ďalej ako $a_{71}+1 = {a_{70}}^2+a_{70} = {a_{70}}^2 + {a_{69}}^2 + a_{69} - 1 = \dots = {a_{70}}^2 + {a_{69}}^2 + \dots + {a_6}^2 + a_6 - 64$.

Keď sa teraz pozrieme na to, aký tvar sme dostali, všimneme si, že už máme súčet všetkých druhých mocnín šiesteho až sedemdesiateho člena. Stačí nám teda už iba dokázať, že $a_6 - 64 = {a_5}^2 + {a_4}^2 + {a_3}^2 + {a_2}^2 + {a_1}^2$. Tieto členy vieme už jednoducho vyčísliť, keďže prvých 5 máme zadaných v zadaní a $a_6 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 - 1 = 119$.

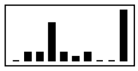
$119 - 64 = 5^2 + 4^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2$

$55 = 25 + 16 + 9 + 4 + 1$

Tým sme dokázali, že súčin prvých 70 členov postupnosti sa rovná súčtu ich druhých mocnín.

2.

Opravovali: **Lujza Milotová a Martin Masrna**
Počet riešení: 30 Najkrajšie riešenia: **Michal Iľkovič a Šimon Komara**



Paťo má na tabuli napísané všetky celé čísla od 1 do N. V jednom kroku zmaže jedno číslo na tabuli a spolu s ním zmaže aj všetky jeho delitele, ktoré boli na tabuli, a napíše všetky jeho kladné delitele, ktoré na tabuli neboli. Napríklad, ak sú na tabuli čísla 1, 2, 5 a 6, tak po zmazaní 6 budú na tabuli 3 a 5.

a. Dokážte, že pre ľubovoľné N sa Paťo vie dostať do stavu, keď na tabuli nebude napísané žiadne číslo.

b. Dokážte, že bez ohľadu na N a na to, ako si Paťo čísla vyberá, vždy v konečnom počte krokov dôjde do stavu, keď na tabuli nebude napísané žiadne číslo.

Riešenie

Začnime dvoma kľúčovými pozorovaniami:

1. Delitele k sú nutne menšie ako k.
2. Aby sme na tabuľu mohli napísať k, musíme zmazať nejaké väčšie číslo.

Pozorovania spojené dokopy nám hovoria, že akonáhle zmažeme aktuálne najväčšie číslo na tabuli, už ho nikdy nenapíšeme. Ak teda v každom kroku Paťo zmaže aktuálne najväčšie číslo na tabuli, po najviac N krokoch ostane tabuľa prázdna. Časť a. je teda vyriešená.

Pre časť b. nám dokonca bude stačiť iba druhé pozorovanie, pomôžeme si ale trikom. Reprezentujme čísla na tabuli ako číslo v binárnej sústave (označme ho B), a teda reťazec núl a jednotiek o dĺžke N. Ak sa číslo k na tabuli nachádza, k-ta cifra od konca B bude 1, ak sa na tabuli nenachádza, bude to 0.

Napríklad pre $N = 5$: Na začiatku sú na tabuli všetky čísla, teda $B = 11111$. Potom zmažeme číslo 4 (a teda aj 1 a 2). Čísla na tabuli teraz reprezentujeme ako $B = 10100$. Teraz zmažeme číslo 5 (teda napíšeme číslo 1) a $B = 00101$.

Ak mažeme číslo k, zmenšujeme B o 2^{k-1}. Z druhého pozorovania vyplýva, že môžeme prepísať iba cifry napravo od k-tej. A teda B vieme zväčšiť o maximálne $1 + 2 + \dots + 2^{k-3} + 2^{k-2} = 2^{k-1} - 1$.

Určite teda B viac zmenšíme, ako zväčšíme. Preto bez ohľadu na to, ako vyzerá tabuľa a ktoré číslo zmažeme, B sa v každom kroku zmenší aspoň o 1. Po konečnom počte krokov teda bude rovné nule, čo reprezentuje prázdnu tabuľu.

Iné riešenie

Poďme si ukázať, že časť b. nebolo nutné riešiť takýmto „trikom“. Existovalo skutočne veľa možných postupov - ako ukážku sme vybrali matematickú indukciu. Budeme dokazovať o čosi všeobecnejšie tvrdenie, a to také, že tabuľu vyprázdnime bez ohľadu na to, ktoré čísla od 1 po N sú na začiatku napísané a ktoré nie.

Pre $N = 1$ tvrdenie platí - buď je tabuľa rovno prázdna, alebo číslo 1 zmažeme v prvom kroku, lebo nemáme inú možnosť. Poďme na indukčný predpoklad:

Predpokladajme, že tvrdenie platí pre $k-1$; a teda bez ohľadu na to, ktoré z čísel $\{1,\dots,k-1\}$ sú na tabuli napísané, po konečnom počte krokov sa dostaneme ku prázdnej tabuli. Poďme toto tvrdenie dokázať aj pre k:

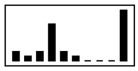
Pre spor nech tabuľu nezmažeme po konečnom počte krokov. Akonáhle zmažem k, na tabuli ostanú iba čísla z $\{1,\dots,k-1\}$ a podľa IP vieme, že po konečnom počte krokov sa tabuľa vyčistí. To znamená, že v každom kroku musíme zmazať číslo menšie ako k. Podľa našich dvoch pozorovaní z úvodu vieme, že zmažeme alebo napíšeme iba nutne menšie čísla.

Ak pracujeme iba s číslami $\{1,\dots,k-1\}$, tak z IP vyplýva, že po konečnom počte krokov ich zmažeme všetky a na tabuli ostane iba číslo k. V nasledujúcom kroku tak nebudeme mať inú možnosť ako ho zmazať a dostali sme sa do sporu.

Pomocou IP sme dokázali, že tabuľu s ľubovoľnými číslami z $\{1,\dots,k\}$ určite zmažeme po konečnom počte krokov. Dôkaz indukciou je hotový; tvrdenie platí pre všetky N.

3.

Opravovali: **Miriam Horváthová a Štefan Vašak**
Počet riešení: 27 Najkrajšie riešenia: **Oliver Seman a Veronika Vodičková**



Na začiatku hry máme 3 krabice, v ktorých je postupne $2023, 2024$ a 2025 kameňov. Anna a Boris sa striedajú v ťahoch, Anna začína. Ten, kto je na ťahu, si vyberie 2 krabice, odstráni z nich všetky kamene a potom rozdelí kamene z tretej krabice do všetkých troch krabíc:

a. rovnomerne (tak, aby rozdiel počtov kameňov v rôznych krabiciach bol najviac 1)

b. ľubovoľne

tak, aby žiadna krabica nebola prázdna. Keď hráč nemôže uskutočniť platný ťah, prehral. Ktorý z hráčov má víťaznú stratégiu a akú?

Riešenie

Najprv vyriešme samostatne časť a. Pri rovnomernom rozdelení kameňov vieme presne určiť, koľko kameňov sa môže objaviť v krabiciach po jednotlivých ťahoch.

- 2023 sa rovnomerne rozdelí na 674, 674 a 675, 2024 sa rozdelí na 674, 675, 675 a 2025 sa rozdelí na 675, 675, 675. Všimnime si, že máme iba 2 možné počty kameňov, ktoré môže Boris rozdeľovať.
- 674 sa rozdelí na 224, 225, 225 a 675 sa rozdelí na 3-krát 225. Opäť máme iba 2 možnosti, ktoré bude deliť Anna.
- Hra bude rovnako pokračovať ďalej, Boris bude vyberať z dvojice 74 a 75, Anna z dvojice 24 a 25, Boris z dvojice 8 a 9 a následne Anna z dvojice 2 a 3.

Všimnime si, že 2 kamene sa už nedajú rozdeliť medzi 3 krabice tak, aby žiadna neostala prázdna. Anna si teda v tomto ťahu môže vybrať, či vyhrá (rozdelí 3), alebo či prehrá (rozdelí 2). Do tohto momentu hru ani jeden hráč nedokázal ovplyvniť. Anna v tomto momente rozdelí 3, čím nechá Borisovi 3 krabice po 1 kameni. Boris teda prehral, víťaznú stratégiu má Anna.

Ďalej sa pozrime na časť b. Skúsme sformulovať situácie, kedy hráč vyhral, resp. prehral. Ak je hráč na ťahu a má pred sebou iba krabice s počtom kameňov 1 alebo 2, tak prehral. Hráč teda chce dostať svojho súpera do tejto situácie. To sa dá urobiť, ak má pred sebou aspoň jednu krabicu o veľkosti 3, 4, 5 alebo 6. Zo 7 sa už toto spraviť nedá. 7 kameňov totiž hráč nemôže rozdeliť tak, aby aspoň v jednej krabici nenechal aspoň 3 kamene. Po zamyslení sa nad číslami 8, 9... môžme prísť k záveru, že vyhrávajúce a prehrávajúce situácie sa opakujú a tento cyklus má dĺžku 6.

Skúsme tieto situácie popísať všeobecnejšie pomocou zvyškov po delení 6. Tvrdíme, že ak má hráč pred sebou iba krabice s počtami so zvyškom 1 a 2, tak je v prehrávajúcej situácii a nedokáže žiadnu z týchto krabíc rozdeliť tak, aby nedostal súpera do vyhrávajúcej situácie. Tiež tvrdíme, že ak má hráč pred sebou aspoň jednu krabicu so zvyškom 3, 4, 5 alebo 0, tak je vo vyhrávajúcej situácii a dokáže túto krabicu rozdeliť tak, aby dostal súpera do prehrávajúcej situácie. Tieto tvrdenia dokážme indukčne.

- Za bázu si určme počty od 1 do 6, ktoré sme už rozobrali.
- Predpokladajme, že ak naše tvrdenia platia pre všetky čísla menšie ako $6k$, tak musia platiť aj pre čísla od $6k+1$ po $6k+6$.
- Najprv ukážme, že ak má hráč pred sebou krabicu v tvare $6k+3$ až $6k+6$, tak ju vie rozdeliť tak, aby ostali iba krabice v tvare $6l+1$ alebo $6l+2$. To sa dá urobiť napríklad takto:

$$\begin{aligned} 6k+3 &= (6k+1)+1+1 \\ 6k+4 &= (6k+1)+1+2 \\ 6k+5 &= (6k+1)+2+2 \\ 6k+6 &= (6k+2)+2+2 \end{aligned}$$

- Teraz ukážme, že pri delení krabice s počtom $6k+1$ alebo $6k+2$ nutne vytvoríme krabicu v tvare $6l+3$ až $6l+6$. Ak by existovalo odporujúce rozdelenie, tak by platilo, že $6k+1$, resp. $6k+2$ vieme zapísať ako súčet 3 čísel so zvyškom 1 alebo 2. To však nie je možné, nakoľko najnižší možný súčet takýchto zvyškov je 3 a najvyšší 6.

Svoj indukčný predpoklad sme teda dokázali. Ostáva už iba zistiť, či je Anna na začiatku vo vyhrávajúcej alebo prehrávajúcej situácii. Medzi číslami 2023, 2024 a 2025 je číslo 2025 so zvyškom 0. Anna je preto vo vyhrávajúcej situácii. Existuje pre ňu teda výherná stratégia.

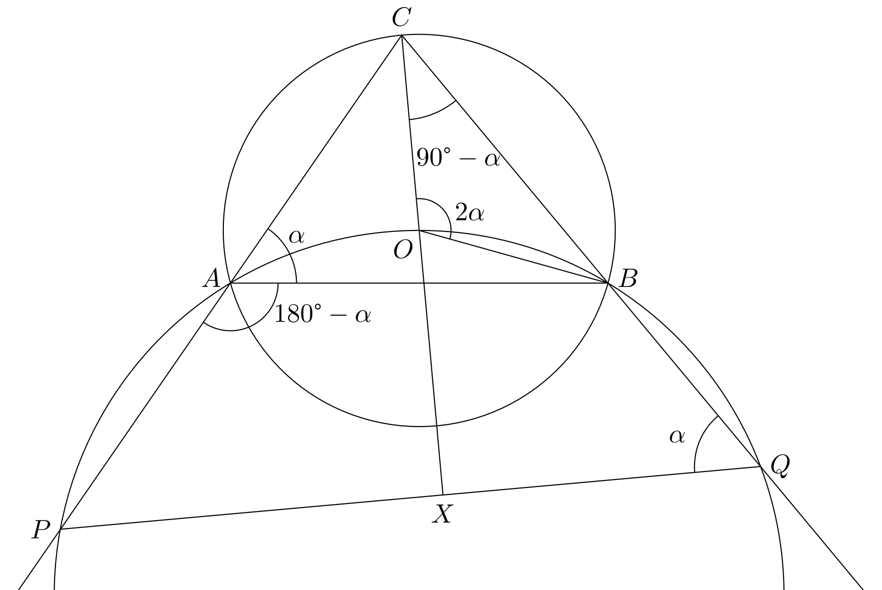
4.

Opravovali: **Erik „Rici“ Novák a Martin „Šmili“ Šmilňák**
Počet riešení: 29 Najkrajšie riešenie: **Alexander Košťál**

Nech O je stred opísanej kružnice trojuholníka ABC. Opíšme bodom AOB kružnicu k. Nech je druhý prienik priamky AC s k bod P a druhý prienik priamky CB s k Q tak, že body P a Q ležia mimo trojuholníka ABC. Dokážte, že priamka CO je kolmá na priamku PQ.

Riešenie

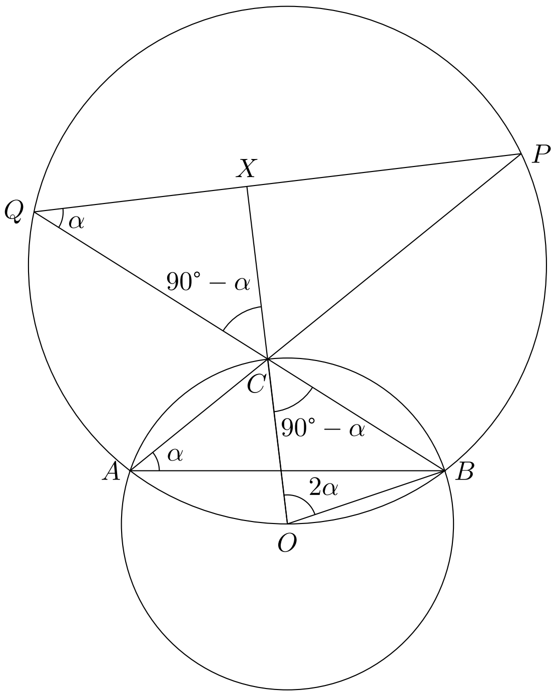
Všimnime si, že úloha má dve rôzne konštrukcie. Ak je uhol ACB ostrý, body P, Q ležia v opačnej polrovine určenej priamkou AB, ako bod C (ako na prvom obrázku). Ak je naopak tupý, tak ležia v rovnakej polrovine ako C (ako na druhom obrázku). Pravý byť nemôže, keďže by potom podľa Tálesovej vety ležali body A, O, B na priamke, a teda by sa im nedala opísať kružnica.



Rozoberme prvý prípad. Označme si ako α veľkosť uhla BAC. Uhol BOC je stredový ku obvodovému uhlu BAC, teda platí $|\sphericalangle BOC| = 2\alpha$. Úsečky BO a CO sú polomermi kružnice opísanej trojuholníku ABC, preto sú rovnako dlhé. Trojuholník BCO je preto rovnoramenný so základňou BC. Jeho uhly pri základni sú teda zhodné a ich súčet je $180° - |\sphericalangle BOC| = 180° - 2\alpha$. Preto $|\sphericalangle OBC| = |\sphericalangle BCO| = 90° - \alpha$.

Uhol BAP je susedný k uhlu BAC, teda $|\sphericalangle BAP| = 180^\circ - \alpha$. Uhly BAP a BQP sú protiľahlé v tetivovom štvoruholníku $PQBA$, teda súčet ich veľkostí je 180° a z toho $|\sphericalangle BQP| = \alpha$.

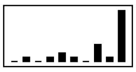
Označme si priesečník priamok PQ a CO ako X. V trojuholníku XQC je súčet vnútorných uhlov okrem uhla QXC rovný 90°. Z toho vyplýva $|\sphericalangle QXC| = 90^\circ$, a teda priamky PQ a CO sú na seba kolmé.



V druhom prípade si opäť pomenujme $|\sphericalangle BAC| = \alpha$. Analogicky k prvému prípadu platí, že $|\sphericalangle BOC| = 2\alpha$ a $|\sphericalangle OBC| = |\sphericalangle BCO| = 90^\circ - \alpha$. Uhol BQP je v tomto prípade obvodový k uhlu BAP, teda platí $|\sphericalangle BQP| = \alpha$. Uhly BCO a XCQ sú vrcholové, z čoho vyplýva $|\sphericalangle XCQ| = |\sphericalangle BCO| = 90^\circ - \alpha$. Kvôli súčtu vnútorných uhlov v trojuholníku XCQ platí, že $|\sphericalangle QXC| = 90^\circ$, a teda priamky PQ a CO sú na seba kolmé.

5.

Opravovali: **Martin „Kopy“ Kopčány a Branislav Ječim**
Počet riešení: 22 Najkrajšie riešenia: **Tomáš Sukeľ, Marek Horváth, Oliver Seman**



Nájdite všetky kvadratické funkcie f, pre ktoré existujú celé čísla m, n také, že:

$$f(m) = f(6m - 1),$$

$$f(n) = f(3 - 15n).$$

Riešenie

Jedna z možností, kedy sa budú funkčné hodnoty dvoch čísel rovnať je, že sú ich argumenty rovnaké. To nastane v nasledovných prípadoch, ktoré si vieme vyjadriť rovnicami:

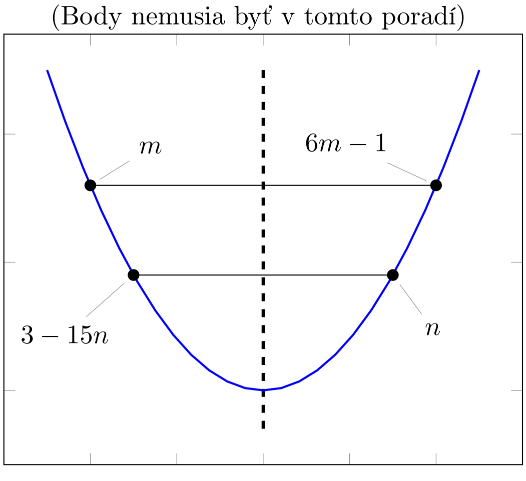
$$\begin{aligned} m &= 6m - 1 \\ m &= \frac{1}{5} \\ n &= 3 - 15n \\ n &= \frac{3}{16} \end{aligned}$$

To však nemôže nastať, keďže zo zadania sú m a n celé čísla. Teda platí:

$$\begin{aligned} m &\neq 6m - 1 \\ n &\neq 3 - 15n \end{aligned}$$

Grafom kvadratickej funkcie je parabola. Tá je symetrická podľa svojej osi, ktorá je rovnobežná s osou y a prechádza vrcholom tejto paraboly. Keďže $f(m) = f(6m - 1)$, tak sú to jediné dva body, kde kvadratická funkcia nadobúda danú hodnotu, a teda x-ová súradnica vrcholu je v strede medzi m a $6m - 1$. Podobne x-ová súradnica vrcholu musí byť aj v strede medzi n a $3 - 15n$.

(Body nemusia byť v tomto poradí)



Označme x-ovú súradnicu vrcholu v a vyjadrime túto premennú ako aritmetické priemery x-ových súradníc bodov na parabole:

$$
\begin{aligned}
v &= \frac{m+6m-1}{2} \\
v &= \frac{n+3-15n}{2} \\
\frac{7m-1}{2} &= \frac{3-14n}{2} \\
7m-1 &= 3-14n \\
7m+14n &= 4 \\
7(m+2n) &= 4
\end{aligned}
$$

Keďže m a n sú celé čísla, tak ľavá strana je deliteľná číslom 7 a pravá nie je. Z toho vieme usúdiť, že žiadna taká funkcia neexistuje.

Komentár

Úloha sa dala vyriešiť aj tak, že si dosadíme dané body do všeobecného vzorca ax^2+bx+c. Po zdĺhavých výpočtoch nám vyjde, že $m=\frac{a-b}{7a}$, $n=\frac{3a+b}{14a}$. Riešenie potom vieme dokončiť podobnými úvahami o deliteľnosti siedmimi. Tento postup funguje, ale častokrát sa nám stane, že sa v takýchto výpočtoch stratíme. Preto je lepšie skúsiť sa nad úlohou zamyslieť a využiť nejaké pekné vlastnosti, ktoré o funkciách poznáme.

6.

Opravoval: **Michal Masrna**
Počet riešení: 14 Najkrajšie riešenia: **Šimon Komara a Richard Vodička**

Majme postupnosť reálnych čísel, pre ktorú platí, že $a_0=1$ a

$$a_{n+1}=\frac{7a_n+\sqrt{45{a_n}^2-36}}{2}$$

pre každé nezáporné celé číslo n. Dokážte, že každý člen tejto postupnosti je kladné celé číslo.

Riešenie

Ukážme najprv, že všetky členy postupnosti sú kladné. Vieme, že $a_0=1$ je kladné. Potom pre kladné a_n platí $a_n<\frac{7a_n}{2}$ a $0\le\frac{\sqrt{45a_n^2-36}}{2}$, teda $a_n<a_{n+1}$, čím sme indukciou ukázali, že postupnosť je rastúca, teda všetky jej členy sú kladné.

Ostáva ukázať, že všetky členy postupnosti sú celé čísla. Jednoduchým dosadením do rovnice zo zadania dostaneme $a_1=5$. Teraz indukciou ukážeme, že ak a_n aj a_{n+1} sú celé čísla, potom aj a_{n+2} je celé číslo. Upravujme rovnicu zo zadania:

$$
\begin{aligned}
a_{n+1} &= \frac{7a_n+\sqrt{45{a_n}^2-36}}{2} \\
2a_{n+1}-7a_n &= \sqrt{45{a_n}^2-36} \\
4{a_{n+1}}^2-28a_na_{n+1}+49{a_n}^2 &= 45{a_n}^2-36 \\
4{a_{n+1}}^2-28a_na_{n+1}+4{a_n}^2+36 &= 0 \\
{a_{n+1}}^2-7a_na_{n+1}+{a_n}^2+9 &= 0 \qquad (1)
\end{aligned}
$$

Rovnakými úpravami rovnice pre člen a_{n+2} dostaneme

$${a_{n+2}}^2-7a_{n+1}a_{n+2}+{a_{n+1}}^2+9=0. \qquad (2)$$

Odčítaním (1) od (2) dostávame

$$\begin{aligned}{a_{n+2}}^2 - 7a_{n+1}a_{n+2} + 7a_n a_{n+1} - {a_n}^2 &= 0\\ {a_{n+2}}^2 - {a_n}^2 - 7a_{n+1}(a_{n+2} - a_n) &= 0\\ (a_{n+2} + a_n)(a_{n+2} - a_n) - 7a_{n+1}(a_{n+2} - a_n) &= 0\\ (a_{n+2} + a_n - 7a_{n+1})(a_{n+2} - a_n) &= 0,\end{aligned}$$

z čoho vyplýva, že buď $(a_{n+2} + a_n - 7a_{n+1}) = 0$, alebo $(a_{n+2} - a_n) = 0$. Už sme ukázali, že postupnosť je rastúca, teda $a_{n+2} > a_n$, teda $(a_{n+2} - a_n) \neq 0$. Takže vieme, že

$$\begin{aligned}a_{n+2} + a_n - 7a_{n+1} = 0,\\ a_{n+2} = 7a_{n+1} - a_n.\end{aligned}$$

A keďže predpokladáme, že a_{n+1} aj a_n sú celé čísla, aj a_{n+2} bude celé číslo.

Iné riešenie

Všimnime si, že definícia zo zadania nápadne pripomína vzorec pre výpočet koreňov kvadratickej rovnice. Skonštruujme teda rovnicu (polynóm), ktorá odpovedá danému vzorcu.

$$x^2 - 7a_n x + {a_n}^2 + 9 = 0$$

Rovnicu sme konštruovali tak, aby a_{n+1} bol jeden z jej koreňov, teda

$${a_{n+1}}^2 - 7a_n a_{n+1} + {a_n}^2 + 9 = 0$$

Tým sme sa dostali k rovnici (1) a riešenie môžeme dokončiť podobne ako v prvom prípade.

Komentár

Okrem toho, že v postupnosti sa nachádzali iba kladné celé čísla, platilo, že postupnosť sa skladala z každého štvrtého člena Fibonacciho postupnosti. To sa dalo všimnúť po vypísaní si pár prvých členov a niektorí z vás dokonca úlohu vyriešili dôkazom tohto silnejšieho tvrdenia. Väčšina riešenia pozostávala z pomerne jednoduchých úprav výrazov, čo opäť ukazuje, že sa netreba báť ani úloh s vyšším číslom. Ak ste tak neurobili, odporúčali by sme pri takýchto úlohách si vždy aspoň vypísať prvých pár členov a pokúsiť sa zadaný výraz nejako upraviť. Čiastočné body boli udeľované napr. aj iba za dôkaz toho, že postupnosť je rastúca.

Konečné poradie letného semestra 48. ročníka

Poradie	Meno a priezvisko	Ročník	Škola	PS	1.	2.	3.	4.	5.	6.	H	CS
1. - 7.	Tomáš Sukeľ	S2	GAGLSHE	54	9	9	-	9	9	9	0	108
	Michal Iľkovič	S3	GSMTŠPO	54	9	9	9	9	9	9	0	108
	Matúš Pokorný	S2	GAMČABA	54	9	9	9	9	9	-	0	108
	Lucia Chladná	S3	GAMČABA	54	9	9	9	9	9	9	0	108
	Eva Krajčiová	S2	GAlejKE	54	9	3	9	9	9	9	0	108
	Šimon Komara	Z9	ZŠKúpeľná	54	9	9	-	9	9	9	0	108
	Richard Vodička	S3	GAlejKE	54	9	9	9	9	9	9	0	108
8.	Marek Horváth	S3	GKonšPO	54	9	9	9	9	9	3	0	102
9.	Alexander Košťál	S2	GJaroBR	51	9	4	-	9	9	7	0	96
10.	Oliver Seman	S2	GAlejKE	45	9	9	9	-	9	-	0	90
11.	Alenka Bálintová	S1	BGMHSuč	45	9	-	9	8	7	-	0	87
12.	Matúš Libák	S3	GAlejKE	45	9	9	9	9	4	-	0	85
13.	Michal Vodička	S1	GAlejKE	54	-	9	-	9	-	-	0	81
14.	Sarah Klopstock	S1	ŠpMNDaG	54	-	-	-	6	5	9	0	80
15.	Richard Prikler	S1	GJARMPO	36	9	3	3	9	-	-	0	69
16.	Filip Findorák	S2	Šrobárka	27	-	6	2	9	7	9	0	66
17.	Ondrej Králik	S3	GAlejKE	32	9	5	-	9	4	-	0	59
18.	Veronika Jakabová	S2	GAlejKE	33	-	2	3	9	9	-	0	58
19.	Natália Poliačiková	S3	GPoštKE	36	9	3	9	-	-	-	0	57
20. - 21.	Veronika Vodičková	S3	GAlejKE	27	-	3	9	9	7	-	0	55
	Janka Urbánová	S1	GAlejKE	32	9	-	3	5	1	-	0	55
22.	Martina Osuská	S1	GJHN3BA	30	-	3	5	9	-	-	0	52
23.	Lívia Lukáčová	Z9	ZPoliKE	39	-	1	0	9	-	1	0	51
24.	Sophia Sotáková	Z9	ZŠverHE	33	-	3	-	9	-	-	0	48
25. - 26.	Tomáš Saksun	Z9	GAlejKE	33	2	3	3	2	-	-	0	46
	Samuel Šandor	S2	GPoštKE	20	-	9	-	9	8	-	0	46
27.	Kalista Semancová	S3	GAGLSHE	30	9	3	0	-	-	2	0	44
28.	Michal Ferdinandy	S1	GAlejKE	32	-	3	3	-	-	1	0	42
29.	Lívia Sušková	Z9	EGJAKKE	26	6	-	4	-	-	-	0	40
30.	Juraj Kramár	S3	GAlejKE	36	-	-	3	-	-	-	0	39
31. - 32.	Nina Hudáková	Z9	GAlejKE	38	-	-	-	-	-	-	0	38
	Ondrej Tóth	S1	SPS KNM	25	-	4	2	-	3	1	0	38
33.	Maxima Anna Alžbeta Bednarčíková	S3	Šrobárka	18	-	-	-	9	9	-	0	36
34. - 35.	Marie Kasalová	Z9	GTruhla	35	-	-	-	-	-	-	0	35
	Martin Dudjak	S2	SMládPP	35	-	-	-	-	-	-	0	35
36. - 38.	Nina Anna Betáková	S2	GAGLSHE	32	-	-	-	-	-	-	0	32
	Lucia Kleščová	S3	GPoštKE	20	6	-	-	6	-	-	0	32
	Oskar Cacara	S2	GPoštKE	20	-	9	3	0	-	-	0	32
39.	Soňa Vasiľová	S2	GKukuPP	26	-	-	-	5	-	-	0	31
40.	Karin Sabová	S2	GAlejKE	21	-	-	3	6	-	-	0	30
41.	Daniel Ryan Takáč	Z9	GAlejKE	28	-	-	1	-	-	-	0	29
42.	Katarína Farbulová	S3	GPoštKE	6	9	1	4	-	7	-	0	27
43.	Klára Fidermáková	S3	SPŠTaD	16	-	-	-	-	-	-	0	16
44. - 45.	Tomáš Lang	S1	SPŠTSNV	8	2	2	-	-	-	-	0	14
	Oliver Urdzik	S3	GymGol	14	-	-	-	-	-	-	0	14
46.	Martin Vrba	S1	GPoštKE	7	-	6	-	-	-	-	0	13

Názov: Strom – korešpondenčný matematický seminár
Číslo 6 • Máj 2024 • Letný semester 48. ročníka (2023/2024)
Web: `seminar.strom.sk`
E-mail: `strom@strom.sk`
Riešenia: Prijímame odovzdaním na webe a v prípade poruchy stránky na adrese `riesenia.strom@strom.sk`.

Vydáva: Združenie Strom, Jesenná 5, 041 54 Košice
Web: `zdruzenie.strom.sk`
E-mail: `info@strom.sk`

Organizačný poriadok korešpondenčných matematických seminárov Malynár, Matik, STROM je zaregistrovaný na Ministerstve školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky pod číslom 2017/13750:2-10B0.