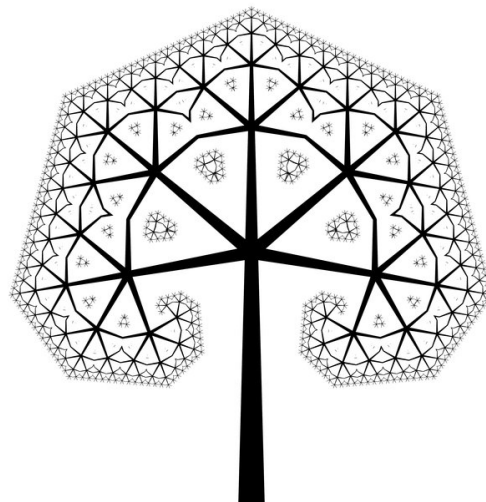




## Milí riešitelia,

zima sa nám pomaly, ale isto chýli ku koncu a s ňou aj čas sústrediek, voľna a prázdnin. Na zimnom sústreďení v Danišovciach nám síce neprišlo počasie, ale aj napriek tomu sme si užili kopec zábavy so super partiou ľudí. A pre všetkých, čo sa na sústreďenie nedostali, sa práve naskytá nová príležitosť. Prichádza jar, ktorá so sebou už tradične prináša sériu letného semestra súťaže. Začíname odznova, preto máte opäť šancu zabojovať o vysoké umiestnenia. Odmenou pre najlepších z vás bude opäť účasť na jesennom sústreďení. Je o čo bojovať, tak oprášte perá a vytiahnite papiere, úlohy sú rozdané.

Vaši **STROM**isti



## TMM

Aj toto leto môžeš stráviť týždeň plný zábavy s kamarátmi a super vedúcimi na Táboře mladých matematikov. Môžeš sa tešiť na neopakovateľný program, zábavne podanú matiku a príjemnú spoločnosť.

TMM sa bude konať 11. - 18. augusta v Chate Radzim pri obci Vyšná Slaná a je určené pre budúcich siedmakov až budúcich druhákov na strednej škole. Kompletne informácie ako aj prihlasovanie nájdeš na našej stránke. Nenechávaj si prihlásenie na poslednú chvíľu, lebo počet miest je obmedzený. Tešíme sa na teba.

## Náboj

Nezadržateľne sa k nám blíži aj najväčšia tímová súťaž roku, ktorou je náš obľúbený Náboj. Tento rok sa uskutoční 22. 3. 2019. Súťažiť sa bude v mestách Bratislava, Košice, Praha, Opava, Passau, Linz, Zürich, Krakov, Wroclav, Varšava, Bielostok, Budapešť, Veszprém, Cambridge, Edinburgh, Novosibirsk a Konstanca, takže konkurencia bude naozaj veľká. Ak o súťaži veľa neviete a chcete by ste sa so svojou školou zapojiť, prípadne získať nejaké ďalšie informácie, navštívte stránku <http://math.naboj.org/>. Detaily sa budú čoskoro posilať aj do škôl. **STROM**áci sa na vás už tešia v Košiciach :)

## 2% z daní

Aj tento rok môžu vaši rodičia venovať 2% (niektorí dokonca až 3%) zo svojich daní verejno-prospešným organizáciám ako sme my.

Peniaze získané z 2% v **STROME** využívame na pokrytie časti nákladov spojených s aktivitami pre vás (kopírovanie časopisov, poštovné, ceny na súťažiach, aktivity na sústreďeniach,...).

Chceme vás preto poprosiť, aby ste rodičom, členom svojej blízkej aj vzdialenej rodiny, susedom a kľudne aj cudzím ľuďom na ulici porozprávali o našich aktivitách a poprosili ich, aby svojou troškou podporili našu dobrovoľnícku činnosť a pomohli tým skupine mladých cielavedomých ľudí zabezpečujúcich chod týchto úžasných seminárov, ktoré tak zbožňujete. Porozprávajte im, čo pre vás znamená sústreďenie, čo vám dáva riešenie úloh nášho seminára a vysvetlite im, že takto podporia aj váš rozvoj a prispedia k zmysluplnému tráveniu vášho voľného času.

Potrebné informácie o tom, ako darovať 2%, nájdete na stránke <https://zdruzenie.strom.sk/sk/zdruzenie/2percenta/>. Radi vám zodpovieme lubovoľné otázky ohľadom našej podpory aj prostredníctvom mailou na adrese [info@strom.sk](mailto:info@strom.sk). Ďakujeme!

## Zadania úloh letného semestra 42. ročníka

Nezabudni si vytvoriť či aktualizovať profil na <https://seminar.strom.sk>.

### 1 Prvá séria

Termín odoslania riešení: **18. 3. 2019**

- Dokážte, že  $\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}$  nie je racionálne číslo pre žiadne celočíselné  $n$ .
- Nech  $a, b, c, x, y$  a  $z$  sú nezáporné reálne čísla také, že  $a^2 + b^2 = c^2$  a  $x^2 + y^2 = z^2$ . Dokážte, že potom platí  $(a+x)^2 + (b+y)^2 \leq (c+z)^2$  a zistite, kedy nastáva rovnosť.
- Máme šachovnicu  $n \times n$ . Niektoré políčka (okrem ľavého horného a pravého dolného rohu) nafarbíme na červeno tak, že šachový kôň sa nevie dostať z ľavého horného rohu do pravého dolného rohu bez toho, aby musel stúpiť na červené políčko. Zistite, pre ktoré  $n$  platí, že pri ľubovoľnom takomto ofarbení vieme nájsť tri po sebe idúce políčka na nejakej diagonále také, že aspoň dve z nich sú červené.
- Lichobežník  $ABCD$  je vpísaný do kružnice tak, že základňa lichobežníka  $AB$  je jej priemer. Označme  $E$  priesečník uhlopriečok lichobežníka  $ABCD$ ,  $S$  stred úsečky  $AB$  a zostrojíme bod  $X$  tak, aby bol  $ASEX$  rovnobežník. Ukážte, že  $|XA| = |XD|$ .
- Dokážte, že ak funkcia  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  spĺňa nerovnosti  $f(x) \leq x$  a  $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$  pre všetky  $x, y$  reálne čísla, potom  $f(x) = x$  pre všetky reálne  $x$ .
- V škole sa niektoré dvojice žiakov kamarátia a niektoré nie (kamarátstvo je obojstranné). Tímom nazývame skupinu práve 20 ľudí, v ktorej sa všetci navzájom kamarátia. Každý žiak je členom nejakého tímu, ale keď zrušíme ľubovoľné kamarátstvo, tak vždy bude existovať aspoň jeden žiak, ktorý nie je v žiadnom tíme. Tím, ktorý obsahuje žiaka, ktorý má kamarátov len v tomto tíme, nazveme „tím so stredom“. Dokážte, že pre ľubovoľnú dvojicu žiakov, ktorí sa kamarátia, existuje tím so stredom, ktorého sú obaja členmi.

### 2 Druhá séria

Termín odoslania riešení: **24. 4. 2019**

- V tabuľke  $25 \times 25$  sú čísla  $+1$  a  $-1$ . Nech  $a_i$  je súčin čísel v  $i$ -tom riadku a  $b_j$  je súčin čísel v  $j$ -tom stĺpci. Dokážte, že súčet  $a_1 + b_1 + \dots + a_{25} + b_{25}$  nie je rovný nule.
- Ukážte, že neexistuje aritmetická postupnosť s 3 členmi z nekonečnej geometrickej postupnosti  $\{2^k\}_{k=0}^{\infty}$ .
- V lichobežníku  $ABCD$  sú  $AB$  a  $CD$  rovnobežné a navyše platí  $|BC| = |AB| + |CD|$ . Nech  $F$  je stredom  $AD$ . Nájdite všetky možné veľkosti uhla  $BFC$ .
- Máme trojuholník  $ABC$  a na strane  $AB$  vyznačíme bod  $S$  tak, aby  $|AS| = |BS|$ . Následne označme  $I_1$  stred kružnice vpísanej trojuholníku  $CAS$  a  $I_2$  stred kružnice vpísanej trojuholníku  $CBS$ . Označme  $k_1$  kružnicu opísanú trojuholníku  $AI_1C$  a  $k_2$  kružnicu opísanú trojuholníku  $BI_2C$ . Dokážte, že  $k_1$  a  $k_2$  sa okrem bodu  $C$  pretínajú na priamke  $CS$ .
- Nájdite všetky trojice celých čísel  $(a, b, c)$  také, že  $3^a + 3^b + 3^c$  je druhou mocninou celého čísla.
- Nájdite všetky funkcie  $f(x)$  na reálnych číslach spĺňajúce  $f(t^2 + u) = t \cdot f(t) + f(u)$  pre všetky reálne čísla  $t$  a  $u$ .

**Autori zadaní úloh:** Peter Kovács, Žaneta Semanišínová, Kristína Mišlanová, Roman Staňo, Daniel Onduš, Martin Masrna, Jakub Genčí

## Pokyny pre riešiteľov

**Seminár** je určený pre žiakov prvého až štvrtého ročníka stredných škôl a príslušných tried osemročných a bilingválnych gymnázií. Zapojiť sa môžu aj žiaci nižších ročníkov; v súťaži majú rovnaké podmienky a výhody ako prváci. STROM je súťaž jednotlivcov a riadi sa organizačným poriadkom zaregistrovaným na Ministerstve školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky pod číslom 2016-9485/41562:71-10E0.

### Registrácia

Korešpondenčný matematický seminár STROM je jednou z aktivít národného projektu IT Akadémia - vzdelávanie pre 21. storočie (<https://itakademia.sk>). Pred tým, ako odošleš prvé príklady (poštou alebo elektronicky), je preto potrebné, aby si sa na túto aktivitu prihlásil.

Ak si sa zapojil do niektorej z našich aktivít v rámci národného projektu, tak už máš konto na portáli IT Akadémie (<https://registracia.itakademia.sk>). V takom prípade stačí, ak sa prihlásiš na aktivitu Korešpondenčný matematický seminár STROM na tomto portáli.

Ak ešte nie si registrovaný v projekte, vyplň nám kontaktné údaje v dotazníku, ktorý nájdeš na stránke seminára, a my ti konto vytvoríme.

Registrácia je povinná, ak chceš, aby tvoje riešenia boli opravené. Vďaka tomu, že seminár je jednou z aktivít projektu, sú všetky aktivity v rámci neho pre teba bezplatné, a tak, ak sa budeš snažiť, budeš sa môcť zúčastniť sústredujúceho v Danišovciach bezplatne a pre najlepších troch riešiteľov sú pripravené aj knižné poukážky.

S registráciou nech ti pomôžu rodičia alebo učiteľ v škole. V prípade, že máš ty alebo tvoji rodičia, resp. učitelia akékoľvek otázky k registrácii, neváhajte nás kontaktovať e-mailom na [sutaze@itakademia.sk](mailto:sutaze@itakademia.sk).

**Prihlásenie do semestra** prebieha online, na našej webovej stránke <http://seminar.strom.sk>. Ak si novým riešiteľom, alebo ešte nemáš vytvorený účet, zaregistruj sa a vyplň povinné údaje v užívateľskom profile – odkaz **Aktualizovať profil** v sekcii **Správa účtu**. Tieto údaje potrebujeme, aby sme sa s Tebou mohli skontaktovať aj v čase, keď nie si v škole (prázdniny, ...), v prípade pozývania na sústredujúce a tiež, aby sme ťa mohli uverejniť v poradí riešiteľov aktuálnej časti seminára. Na tejto stránke nájdeš takisto svoje opravené a obodované riešenia, bez ohľadu na to, ako si ich poslal.

Prihláška (vyplnenie profilu) je **povinná pre všetkých riešiteľov**. Úlohy, ktoré sa nedajú priradiť k užívateľovi s korektným vyplneným profilom, **nebudú opravené**.

**Úlohy** riešte zásadne samostatne, neodpisujte, v riešeníach vysvetľujte celý svoj myšlienkový postup ako v Matematickej olympiáde. Svoje riešenia môžete poslať poštou alebo cez našu webovú stránku, nie odovzdávať osobne. Pri opravovaní sa držíme zásady, že čo sa nedá prečítať, nemôže byť ohodnotené bodmi. Preto zvážte, či nenapíšete svoje riešenia na počítači. Riešenia poštou zasielajte do uvedeného termínu (rozhoduje dátum poštovej pečiatky) na adresu

PF UPJŠ  
**STROM**  
Jesenná 5  
041 54 Košice.

**Elektronické odovzdávanie** je možné do uvedeného termínu cez webový portál na stránke <http://seminar.strom.sk>. Súbor s riešením odovzdáte jednoducho po prihlásení do svojho užívateľského účtu - tlačidlo **Odovzdať** pri konkrétnom príklade v sekcii **Príklady**. Úlohy odovzdávajte primárne vo formáte PDF, portál na vaše riziko zvládne aj konverziu z iných formátov ako je JPG, PNG, či DOC (riešenia si po nahraní radšej skontrolujte).

Jedine v prípade technických problémov na našej strane je možné poslať riešenia vo formáte PDF (riešenia v inom formáte nebudú akceptované) na e-mailovú adresu [riesenia.strom@strom.sk](mailto:riesenia.strom@strom.sk).

**Riešenie** každej úlohy píše na samostatný papier **formátu A4**, respektíve do samostatného súboru, na výšku s **menom, školou, triedou a číslom úlohy**. Ak by vám nebolo jasné zadanie niektorej úlohy, obráťte sa na nás prostredníctvom komentárom k úlohám na našej stránke, cez e-mail [strom@strom.sk](mailto:strom@strom.sk) alebo osobne.

**Bodovanie** úloh závisí od kvality riešenia. Za každú úlohu môže riešiteľ získať najviac 9 bodov. Body môžete získať aj za čiastočné vyriešenie zadaných úloh. Preto sa nebojte poslať aj svoje neúplné riešenia. Do celkového poradia sa započítavajú body takto:

- štvrtáci, október:** všetky vyriešené úlohy
- tretiaci, septima:** všetky vyriešené úlohy
- druháci, sexta:** päť najlepšie vyriešených úloh plus minimum z týchto piatich úloh
- prváci, kvinta a mladší:** päť najlepšie vyriešených úloh plus maximum z týchto piatich úloh

### Príklad použitia pravidiel:

Štyria bratia, štvrták Vlado, tretiak Fero, druhák Jaro a prvák Marcel, vyriešili všetky úlohy úplne rovnako (zhodou náhod, že) za 3, 2, 4, 1, 5 a 4 body. Vlado potom získal  $3 + 2 + 4 + 1 + 5 + 4 = 19$  bodov, Fero tiež získal  $3 + 2 + 4 + 1 + 5 + 4 = 19$  bodov, Jaro  $(3 + 2 + 4 + 5 + 4) + 2 = 20$  bodov a Marcel  $(3 + 2 + 4 + 5 + 4) + 5 = 23$  bodov. Jasné, nie?

Riešenie založené na využití výpočtovej techniky spravidla nebude ohodnotené vysokým počtom bodov.

Hodnotenú budú len tie časti riešenia, ktorých správnosť je možné overiť v primeranom čase.

### Riešenia po termíne

V prípade, že svoje riešenie pošleš po termíne odovzdania, riešenie ti opravíme len v prípade, že nám bude doručené do štyroch dní od termínu série. V tomto prípade ti za oneskorenie strhneme body. Body sa strhávajú nasledovne, podľa dĺžky omeškania:

- do 24 h: 2/3 bodov zaokrúhlené nahor
- viac ako 24h a do štyroch dní: 1/2 bodov zaokrúhlené nahor
- viac ako štyri dni: riešenie neopravujeme

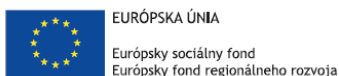
Vo výnimočných prípadoch môžeme body za riešenie neznížiť.

**Varovania (!!!).** Body sa samozrejme bez výnimky strhávajú za odpisovanie a za poslanie riešení po termíne. Pri odpisovaní rozlišujeme podobné riešenia (počet bodov delíme počtom zúčastnených a zaokrúhlime nadol) a „takmer kópie“, ktoré ostávajú bez bodu. Ak (náhodou) nájdete úlohu riešenú v literatúre, uveďte názov, autora a stranu, inak riskujete stratu bodov za odpisovanie (je však potrebné napísať aj samotné riešenie). V prípade, že nie ste spokojní s bodovým ohodnotením vášho riešenia, môžete nám do dvoch týždňov od opravenia riešení zaslať e-mailom sťažnosť a tá bude prešetrená.

**Sústredenie** je odmenou pre najlepších, príležitosťou naučiť sa niečo nové a stretnúť sa s ostatnými riešiteľmi. Zúčastňujú sa ho riešitelia korešpondenčných sérií na základe poradia po korešpondenčných sériách danej časti ročníka. Sústredenie je určené najmä pre študentov stredných škôl (a im príslušných ročníkov na osemročnom gymnáziu), mladší žiaci (tí, ktorí počas sústredenia nie sú stredoškólakmi) sú pozvaní ako náhradníci. Ďalší účastníci a náhradníci sú pozývaní podľa poradia **STROMu**, nie však tí riešitelia, ktorí už majú maturitu za sebou.

<b>Názov</b>	<b>STROM</b> – korešpondenčný matematický seminár Číslo 4 • Február 2018 • Letný semester 42. ročníka (2017/2018)
<b>Internet:</b>	<a href="http://seminar.strom.sk">http://seminar.strom.sk</a>
<b>E-mail:</b>	<a href="mailto:strom@strom.sk">strom@strom.sk</a>
<b>Vydáva:</b>	Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice
<b>Internet:</b>	<a href="https://zdruzenie.strom.sk">https://zdruzenie.strom.sk</a>
<b>E-mail:</b>	<a href="mailto:info@strom.sk">info@strom.sk</a>

Organizačný poriadok korešpondenčných matematických seminárov Malynár, Matik, STROM je zaregistrovaný na Ministerstve školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky pod číslom 2017/13750:2-10B0.



Tento projekt sa realizuje vďaka podpore z Európskeho sociálneho fondu a Európskeho fondu regionálneho rozvoja v rámci Operačného programu Ľudské zdroje