STROM
Korešpondenčný matematický seminár

Ahojte Stromáci,

ako ste už zistili, tento rok sa pomaly ale isto blíži ku koncu sveta. Je to síce trochu smutné, ba až tragické, ale my sme si povedali, že netreba robiť paniku. Jedným slovom: nepanikáriť. Lebo kto by už len chcel mať panický a smutný koniec sveta. A tak sme sa vám tieto posledné útrapy rozhodli zmierniť našimi starostlivo uváženými slovami. Navyše, ak pretočíte kalendár, zistíte, že pár dní po konci sveta príde to, na čo všetci netrpezlivo čakajú. A čo to je? Nuž, je to predsa nový rok! Okrem neho sa však očakáva aj famózne číslo. Aké číslo, to sa dozvedia len tí, ktorí ostanú nažive. Tak sa teda snažte!

vaši **STROM**isti

Riešenia 2. série úloh Zimného semestra 37. ročníka

1. a) Rozhodnite, či sa nejaké prvočíslo dá napísať ako súčet aspoň troch po sebe idúcich kladných celých čísel.
b) Dokážte, že každé nepárne prvočíslo sa dá práve dvomi spôsobmi zapísať ako súčet aspoň troch po sebe idúcich celých čísel.

Opravovali: Janka Baranová a Dano Till **Počet riešiteľov: 37**
Riešenie:

a) Prvú časť úlohy si rozdelíme na dve časti podľa počtu čísel.

- *Nepárny počet kladných celých čísel:*
  Zapíšme prvočíslo P v tvare

$$P = (a-m) + (a-m+1) + \cdots + a + \cdots + (a+m-1) + (a+m),$$

  kde sú všetky sčítance kladné celé čísla a a je stredné číslo súčtu (keďže rozoberáme prípad s nepárnym počtom čísel, tak také existuje).

  To vieme upraviť na tvar $a \cdot (2m+1)$

$$\begin{aligned} P &= (a-m) + (a-m+1) + \cdots + a + \cdots + (a+m-1) + (a+m) \\ &= (a + a + \cdots + a + \cdots + a + a) + (-m) + (-m+1) + \cdots + 0 + \cdots + (m-1) + m \\ &= a \cdot (\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1 + \cdots + 1 + 1}_{2m+1}) - m + m + (m-1) - (m-1) + \cdots + 0 \\ &= a \cdot (2m+1) \end{aligned}$$

Číslo P sme zapísali ako súčin dvoch celých kladných čísel. Z toho vyplýva, že naše prvočíslo P je rovné buď a alebo $2m+1$.
Ak $P = a$, potom $2m+1 = 1$, čo nevyhovuje zadaniu (m musí byť aspoň 1, aby išlo o súčet aspoň 3 čísel) Keď $P = 2m+1$, potom $a = 1$. To ma zá následok, že $a - m$ nie je kladné celé číslo, teda ani tento prípad nevyhovuje zadaniu.

- *Párny počet kladných celých čísel:*
  Prvočíslo P zapíšeme v tvare

$$P = (a-m-1) + (a-m) + (a-m+1) + \cdots + a + \cdots + (a+m-1) + (a+m),$$

kde sú opäť všetky sčítance celé kladné čísla (zápis je rovnaký ako pri nepárnom počte čísel, len pridáme o jedno číslo naviac (aby ich bolo párny počet) a to číslo $a-m-1$).

To si upravíme

$$\begin{aligned} P &= (a-m-1) + \underbrace{(a-m) + (a-m+1) + \cdots + a + \cdots + (a+m-1) + (a+m)}_{a\cdot(2m+1)} \\ &= a\cdot(2m+2) - m - 1 = 2a\cdot(m+1) - (m+1) \\ &= (m+1)\cdot(2a-1) \end{aligned}$$

Z tohto tvaru hneď vidno, že prvočíslo P, vlastne nie je prvočíslo, lebo buď by bola jedna zátvorka rovná 1 a druhá P, alebo naopak, ale v každom prípade by neboli splnené podmienky zo zadania.

Zistili sme, že žiadne prvočíslo nevieme zapísať ako súčet aspoň 3 po sebe idúcich kladných celých čísel.
b) V tejto časti úlohy už môžme okrem celých kladných čísel použiť aj nulu a celé záporné čísla. Chceme, aby súčet niekoľkých po sebe idúcich čísel (aspoň 3) bol prvočíslo, teda číslo kladné. Preto musíme zobrať aj nejaké záporné čísla, lebo pri kladných sme už v úlohe a) ukázali, že to nejde. Ak vezmeme do súčtu nejaké záporné čísla, musíme zobrať aj kladné (aby bol súčet kladný), a dokonca ich musí byť viac. O koľko viac? O 3 a viac to nie je možné, pretože súčet kladných a záporných (rovnakých v absolútnej hodnote) je 0 a dostali by sme sa opäť ku našej úlohe a). Môže ich byť teda viac o 2 alebo o 1. Čo sú práve tieto 2 spôsoby zápisu.

- $P = (-P+1) + (-P+2) + \cdots + 0 + \cdots + (P-1) + P$

- Nech P je nepárne prvočíslo, teda $P = 2k+1$ (pre $k \geq 1$), potom ho vieme zapísať ako súčet dvoch po sebe idúcich čísel $P = k + (k+1)$, a viacerých za sebou idúcich čísel

$$P = (-k+1) + (-k+2) + \cdots + (k-1) + k + (k+1).$$

Komentár: Mnohí ste túto úlohu vyriešili správne. Aj tak sa ale našlo veľa tých, ktorí tiež síce dospeli k správnym výsledkom, ale stratili body, pretože nezdôvodnili, prečo viac ako 2 spôsoby zápisu prvočísla neexistujú. Do budúcna dávajte hlavne pozor na správne čítanie zadania.

2. Dokážte, že z ľubovoľných 50 navzájom rôznych prvočísel je vždy možné vybrať 13 prvočísel tak, že rozdiel každých dvoch z nich je deliteľný piatimi.

Opravovali: Matúš Stehlík a Mirka Vašková **Počet riešiteľov: 35**
Riešenie:

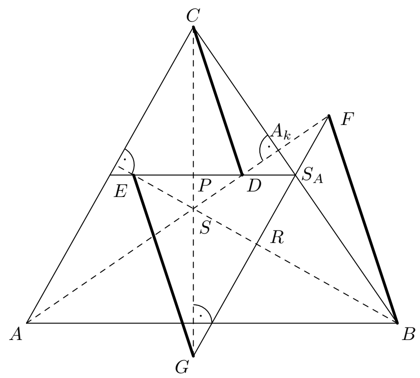
Všetky prvočísla dávajú po delení piatimi zvyšok 0, 1, 2, 3 alebo 4, pričom zvyšok 0 dáva práve jedno prvočíslo, a to 5. Ďalej vieme, že rozdiel dvoch prvočísel s rovnakým zvyškom po delení piatimi dáva zvyšok 0 po delení piatimi, čiže je deliteľný päťkou. Teda máme aspoň 49 prvočísel nedeliteľných päťkou (môžu mať 4 rôzne zvyšky). Z Dirichletovho princípu vyplýva, že vieme vždy vybrať aspoň 13 takých, ktoré majú rovnaký zvyšok po delení piatimi.

Komentár: Pomerne jednoduchá úloha, ako ukazujú aj počty bodov. Pozerať sa na zvyšky po delení bolo niektorým z vás trošku cudzie, čo zväčša výrazne predĺžilo riešenie. Vo vzorovom riešení sa vyskytli dve veľmi užitočné veci: Drichletov princíp a kongruencie (to bolo to s tými zvyškovými triedami, aj keď to nebolo explicitne povedané). Ak ste náhodou o týchto veciach ešte nepočuli odporúčame pozrieť príslušné kapitoly v zbierke KMS[1].

3. V trojuholníku ABC stredná priečka rovnobežná so stranou AB pretína výšky trojuholníka ABC vedené z bodov A a B postupne v bodoch D a E. Stredná priečka rovnobežná so stranou AC pretína výšky trojuholníka ABC vedené z bodov A a C postupne v bodoch F a G. (Výšky berieme ako priamky.) Dokážte, že priamky DC, BF a GE sú rovnobežné.

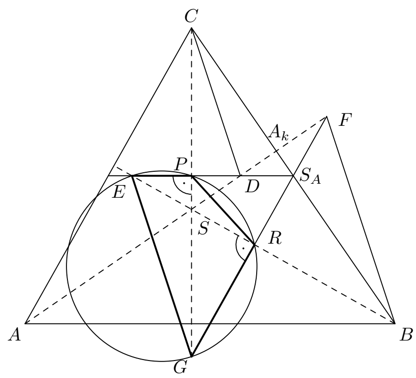
Opravovali: Monika Vaľková a Tomáš Kocák **Počet riešiteľov: 10**
Riešenie:

Ako v každej geometrickej úlohe, aj v tejto sa oplatilo nakresliť si veľký pekný obrázok. Navyše k bodom zo zadania sme pridali niektoré vlastné, ktoré sa nám neskôr zídu. Označme teda A_k pätu kolmice z bodu A, S_a stred strany BC. Budeme ešte potrebovať priesečník výšok, ktorý označme S. Priesečník výšky na stranu AB a strednej priečky rovnobežnej so stranou AB nazveme P. Nakoniec priesečník výšky na stranu AC a strednej priečky rovnobežnej so stranou AC označíme R.

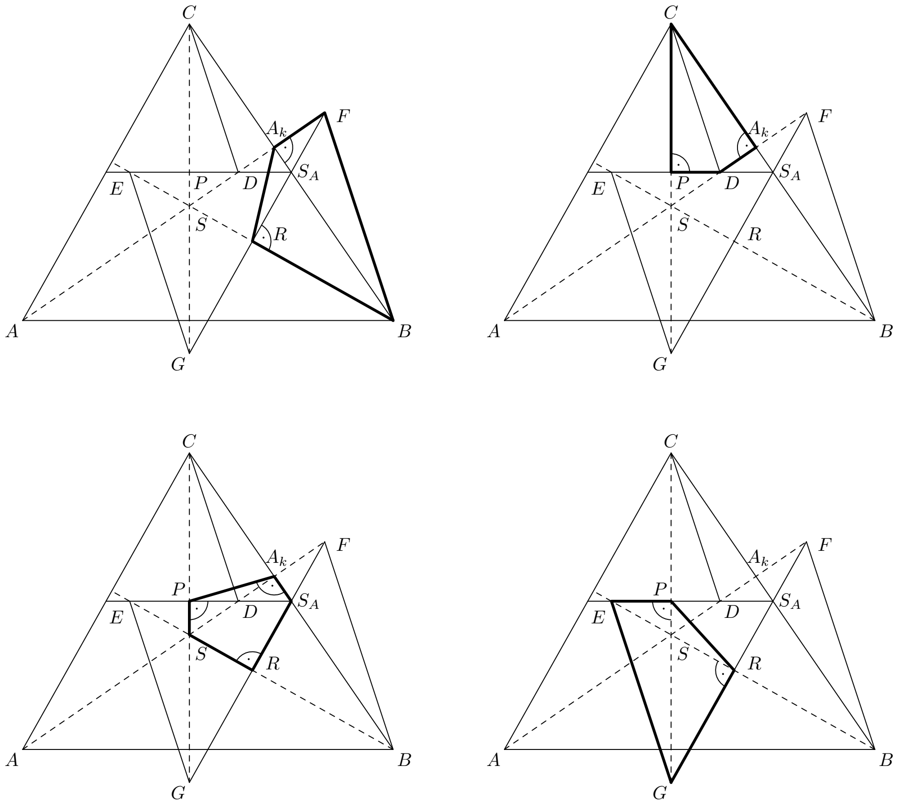


Z obrázku na skúsenejších riešiteľov kričí pár tetivových štvoruholníkov a päťuholníkov, tí môžu tento odsek preskočiť. Pre mladších si zhrnieme, čo sa dá o tetivových štvoruholníkoch povedať. Štvoruholník je tetivový, ak sa mu dá opísať kružnica, teda jeho strany sú jej tetivami. Súčet jeho protiľahlých uhlov je 180 stupňov a na našom obrázku ho spoznáme väčšinou tak, že nad jednou úsečkou sa budú dať zostrojiť dva pravouhlé trojuholníky a teda konce tejto úsečky a vrcholy pri pravých uhloch budú bodmi tetivového štvoruhloníka, napríklad ako na obrázku. Ďalej sa dá vidieť, že $|\sphericalangle ERG| = |\sphericalangle GPE|$, lebo sú to obvodové uhly nad EG a to bude pre nás kľúčové.

[1] http://www.kms.sk/zbierka



Pozrime sa teraz na tri tetivové štvoruholníky a jeden tetivový päťuholník, ktoré tu máme. Pravé uhly v nich sú spôsobené kolmosťou výšok na strany a stredné priečky. Máme tetivové štvouhloníky BFA_kR, PDA_kC, $GRPE$ a jeden päťuholník S_aRSPA_k.



Ak sú BF a DC rovnobežné, tak uhly $\sphericalangle DCA_k$ a $\sphericalangle FBA_k$ sú striedavé a teda rovnaké a naopak. Budeme chcieť ukázať, že $|\sphericalangle DCA_k| = |\sphericalangle FBA_k|$.

$|\sphericalangle FBA_k| = |\sphericalangle FRA_k|$ pretože $FBRA_k$ je tetivový a teda sú to obvodové uhly. Je jasné, že aj $|\sphericalangle FRA_k| = |\sphericalangle S_aRA_k|$. $|\sphericalangle S_aRA_k| = |\sphericalangle S_aPA_k|$, pretože sú obvodové, lebo S_aRSPA_k je tetivový. Ďalej vidíme, že $|\sphericalangle S_aPA_k| = |\sphericalangle DPA_k|$. Posledným krokom je, že $|\sphericalangle DPA_k| = |\sphericalangle DCA_k|$, pretože PDA_kC je tetivový. Ukázali sme, že $|\sphericalangle DCA_k| = |\sphericalangle FBA_k|$ a teda BF a DC rovnobežné.

Veľmi podobne ukážeme, že GE a DC sú rovnobežné. Budeme smerovať k rovnosti $|\sphericalangle EGC| = |\sphericalangle DCG|$. Vieme, že $|\sphericalangle EGC| = |\sphericalangle ERP|$, lebo sú obvodové, keďže $GRPE$ je tetivový. Očividne $|\sphericalangle ERP| = |\sphericalangle SRP|$. Potom $|\sphericalangle SRP| = |\sphericalangle SA_kP|$, pretože sú obvodové vďaka tomu, že päťuholník S_aRSPA_k je tetivový. Je jasné, že $|\sphericalangle SA_kP| = |\sphericalangle DA_kP|$. Posledným krokom je $|\sphericalangle DA_kP| = |\sphericalangle DCP|$ pretože sú obvodové z tetivového štvoruholníka PDA_kC. Dokázali sme, že $|\sphericalangle EGC| = |\sphericalangle DCG|$ a tak sú GE a DC rovnobežné.

4. Abeceda v marťanskom jazyku sa skladá z písmen A a O. Každé dve slová rovnakej dĺžky sa od seba líšia aspoň na troch miestach. Dokážte, že počet slov dĺžky n nie je väčší ako $2^n/(n+1)$.

Opravoval: Matúš Stehlík **Počet riešiteľov: 14**

<u>**Riešenie:**</u>

V riešení budeme uvažovať iba slová dĺžky n pre nejaké pevne zvolené prirodzené číslo n zložené iba z písmen A a O.

myšlienka riešenia: Predstavme si, že zo všetkých slov ideme vyrobiť marťanský slovník. Keď pridáme nejaké slovo do slovníka, tých $n+1$ slov, ktoré sa od neho líšia na najviac jednom mieste, môžeme zahodiť do koša. Pretože už ich nebudeme môcť do slovníka pridať. Treba si rozmyslieť, že pre každé slovo v slovníku bude tá $(n+1)$-tica úplne iná. Zo všetkých 2^n slov vieme zahodiť do koša najviac $\frac{2^n}{n+1}$ takýchto $(n+1)$-tíc. Čiže najviac toľko slov môže byť v slovníku.

Ďalej bude nasledovať to isté v ružovom. Akurát si to všetko pekne formálne dokážeme. Označme M nejakú množinu marťanských slov, v ktorej sa každé dve slová líšia aspoň na troch miestach. Ku každému slovu m z M priradíme množinu všetkých slov, ktoré sa od neho líšia najviac na jednom mieste, označme ju E_m. Všimnime si, že:

- Všetkých možných slov je 2^n. Na každé miesto si vyberáme jedno z dvoch písmen.
- Počet prvkov množiny E_m je $n+1$. Obsahuje slovo m a n-ticu slov, ktoré sa líšia od m na jednom mieste.
- Ak dve rôzne slová m_1, m_2 sú z M, potom E_{m_1} a E_{m_2} sú disjunktné (neobsahujú žiadne rovnaké slová). Totiž ak by nejaké slovo s patrilo do oboch, tak m_1 sa líši od s na najviac jednom mieste a to sa líši od m_2 na najviac jednom mieste. Takže m_1 sa líši od m_2 na najviac dvoch miestach. Keďže sme predpokladali, že sú rôzne, tak nemôžu obe patriť do M. Došli sme k sporu, preto náš predpoklad, že existuje také slovo s musel byť nepravdivý.

Všetky E_m sú po dvojiciach disjunktné a sú podmnožinami 2^n prvkovej množiny všetkých slov. Ich zjednotenie $E = \bigcup_{m \in M} E_m$ nemôže mať viac prvkov ako 2^n. Lenže každá z nich má práve $n+1$ prvkov preto

$$2^n \geq |E| = |\bigcup_{m \in M} E_m| = |M|(n+1).$$

Odkiaľ už plynie, že $\frac{2^n}{n+1} \geq |M|$, čo sme mali dokázať.

Komentár: Táto úloha mala rozhodne pútavé zadanie. Veľmi ťažko sa do nej kopalo iným spôsobom ako bol uvedený vo vzoráku. Niektoré riešenia zakapali na tom, že sa snažili nájsť nejaké pravidlo, podľa ktorého rastie maximálny počet marťanských slov pre rastúce n. Pomerne dobre sa to podarilo odhadnúť *Žanetke Semanišinovej*, ktorá vylepšila odhad zo zadania. Vzorák obsahoval akýsi trik. Vlastne sme spočítali tú istú vec dvoma spôsobmi. Na jednej strane to bol počet prvkov M, na druhej počet nejakých podmnožín všetkých slov, ktoré sme priradili jednotlivým slovám z M. Táto metóda sa zvykne v kombinatorike používať (volá sa prekvapivo: počítanie dvoma spôsobmi). Väčšinou je ťažké objaviť takéto prepojenie, ale výrazne to zjednoduší riešenie.

5. V danom nerovnostrannom trojuholníku ABC pre dĺžky strán platí $a+c=2b$. Označme I stred vpísanej a O stred opísanej kružnice trojuholníka ABC.
a)Označme K priesečník priamok AC a BI. Body D a E sú stredmi strán BC a AB (v tomto poradí). Dokážte, že I je stredom opísanej kružnice trojuholníka DKE.
b)Dokážte, že priamky OI a BI sú na seba kolmé.

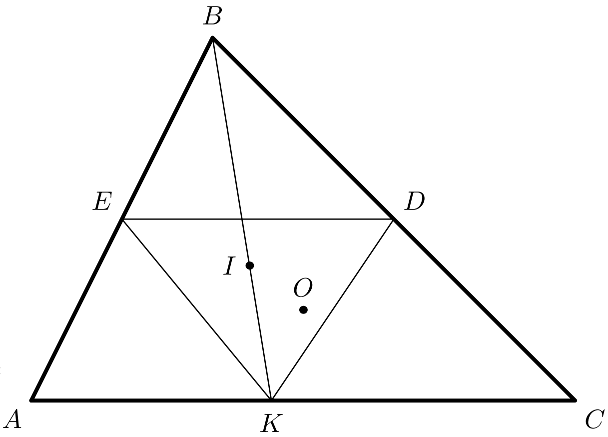
Opravovali: Matúš Stehlík **Počet riešiteľov: 10**

Riešenie:

a) K vyriešeniu prvej časti využijeme fakt, že os uhla os uhla delí protiľahlú stranu v pomere zvyšných dvoch strán. (Skús si ho dokázať pomocou sínusovej vety.) Preto $\frac{|AK|}{|KC|} = \frac{c}{a}$, odtiaľ

$$\frac{a}{a+c} = \frac{|KC|}{|KC|+|AK|} = \frac{|KC|}{b} = \frac{|KC|}{\frac{a+c}{2}} = \frac{2|KC|}{a+c}.$$

Pri predposlednej rovnosti sme využili vzťah $a + c = 2b$ zo zadania. Z rovnosti prvého a posledného výrazu máme $|KC| = \frac{a}{2}$.



Keďže D je stred strany BC , tak $|KC| = |CD| = \frac{a}{2}$. Trojuholník AKE je rovnoramenný a os $\sphericalangle EAK$ je totožná s osou strany EK. Bod I leží na osi strany EK. Analogicky sa dokáže, že I leží na osi strany KD (ak to ešte nevidíš, vyskúšaj!). Takže I leží na priesečníku osí strán trojuholníka DKE, tým pádom je stredom kružnice opísnaej tomuto trojuholníku.
b) Keďže O je stredom kružnice opísanej ABC, tak leží na prieesečníku osí strán. Čiže jeho spojnice so stredmi strán sú kolmé na dané strany. Preto $|\sphericalangle ODB| = |\sphericalangle OEB| = 90°$ z čoho vyplýva, že štvoruholník $EODB$ je tetivový. Ba čo viac, bod O leží na kružnici opísanej BDE, ktorá je Talesovou kružnicou nad priemerom OB. Ďalej využijeme poznatok z prvej časti. Vieme, že I leží na osi uhla $\sphericalangle ABC$ a zároveň na osi strany ED (lebo je stredom kru??nice vpísanej ABC a kružnice opísanej DKE). Čiže je to takzvaný Švrčkuv bod – to znamená, že leží v strede kratšieho oblúka DE kružnice opísanej trojuholníku BDE (kto neverí, si to rýchlo dokáže). Preto body B, E, I, O, D ležia na jednej Talesovej kružnici nad priemerom OB. Uhol $\sphericalangle OIB$ potom musí byť pravý.

Komentár: Všetky riešenia tejto úlohy sa s ňou statočne popasovali, napriek tomu, že bolo treba využiť pomerne pokročilé tvrdenia. Či už ste riešili len časť a) alebo obe, som hrdý na to, že som ich mohol opravovať. Naozaj, dobrá práca, drahí riešitelia tejto úlohy.

6. Nech $a + b + c = 1$ a a, b, c sú dĺžky strán trojuholníka.
a) Dokážte, že $a^2 + b^2 + c^2 < 1/2$. b) Nájdite čo najmenšiu konštantu K tak, aby pre každú trojicu a, b, c spĺňajúcu uvedené predpoklady platilo $a^2 + b^2 + c^2 < K$.

Opravovali: Matúš Stehlík **Počet riešiteľov: 24**

Riešenie:

Najprv ukážeme, že $K = \frac{1}{2}$ je horným ohraničením výrazu $a^2 + b^2 + c^2$, potom dokážeme, že je najmenším.

Odhadneme výraz $a^2 + b^2 + c^2$, pričom využijeme trojuholníkovú nerovnosť a $(a + b + c)^2 = 1$
$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2 + a^2 + b^2 + c^2) <$
$< \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2 + a(b + c) + b(c + a) + c(a + b)) = \frac{1}{2}(a + b + c)^2 = \frac{1}{2}$.
Preto $\frac{1}{2}$ je horné ohraničenie $a^2 + b^2 + c^2$.

Ukážeme, že $a^2 + b^2 + c^2$ sa vie ku $\frac{1}{2}$ ľubovoľne priblížiť. Tým pádom, keby sme mali nejaké iné horné ohraničenie, tak nemôže byť menšie ako $\frac{1}{2}$. Vezmime trojuholník zo stranami $a = \frac{1}{2}(1 - \varepsilon)$,

$b = \frac{1}{2}(1-\varepsilon)$, $c = \varepsilon$, pre nejaké $\frac{1}{4} > \varepsilon > 0$. Potom

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{4}\varepsilon^2\right) + \varepsilon^2 = \frac{1}{2} + \varepsilon\left(\frac{3}{2}\varepsilon - 1\right) > \frac{1}{2} - \varepsilon.$$

Lenže ε si volíme my! Takže ho vieme spraviť ľubovoľne malé. Vieme sa výrazom $a^2 + b^2 + c^2$ dostať ľubovoľne blízko k $\frac{1}{2}$. Preto žiadne menšie ohraničenie nemôže fungovať, totiž pre vhodné ε by vyššie spomenutý trojuholník tvoril protipríklad.

Komentár: Možno netradične jednoduchá úloha na poste číslo 6, o čom svedčí aj počet riešení. Myšlienka bola však tiež celkom netradičná a čo je chvályhodné – nebolo treba použiť žiadne ťažké zbrane na nerovnosti. Treba si z toho zobrať, že aj príklad číslo 6 treba vyskúšať, lebo nikdy neviete, či nie je náhodou ľahší ako trojka. Za zmienku stojí geometrická interpretácia, ktorú vystihol *Michal Buráň* vo svojom riešení. Totiž trojuholníkové nerovnosti a jednotkový obvod nám určujú trojuholník s vrcholmi $(1/2, 1/2, 0), (1/2, 0, 1/2), (0, 1/2, 1/2)$ v súradnicovej sústave s osami a, b, c. Výraz ktorý chceme odhadnúť je druhá mocnina vzdialenosti bodu (a, b, c) od počiatku. Čiže hľadáme v spomenutom trojuholníku bod najďalej od počiatku.

Konečné poradie Zimého semestra 37. ročníka

P.	Meno a priezvisko	Trieda	Škola	MS	1.	2.	3.	4.	5.	6.	P	CS
1.	Martin Vodička	Oktáva	GAlejKE	53	9	9	9	9	9	9	0	107
2.	Jakub Šafin	4. G	GMasaMI	54	7	9	9	9	9	9	0	106
3.	Miroslav Stankovič	3. A	GPoštKE	51	9	9	9	-	9	9	0	96
4.	Marko Puza	3. A	GPoštKE	52	7	9	1	-	9	9	0	87
5.	Žaneta Semanišinová	Kvinta A	GAlejKE	43	9	9	-	6	-	-	9	76
6.	Henrieta Micheľová	Kvinta A	GAlejKE	42	9	9	-	2	-	1	9	72
7.	Ľudmila Šimková	Septima	GPároNR	33	9	9	9	-	4	4	0	68
8.	Filip Unoka	4. A	GPoštKE	27	9	9	-	9	3	9	0	66
9.	Filip Hanzely	Oktáva	GKomeSB	32	-	9	-	9	4	9	0	63
10.	Matúš Hlaváčik	Oktáva	GAlejKE	43	9	9	-	-	-	-	0	61
11.	Kristína Mišlanová	Kvinta A	GAlejKE	33	9	9	-	-	-	-	9	60
12.	Daniel Onduš	Kvinta A	GAlejKE	33	8	9	-	-	-	1	9	60
13.	Štepán Šimsa	Oktáva	GJungmanCZ	0	9	9	9	9	9	9	0	54
14.	Richard Trembecký	Oktáva	GAlejKE	36	9	9	-	-	-	-	0	54
15.	Lucia Magurová	4. A	GPoštKE	30	9	9	-	-	4	-	0	52
16.	Roman Staňo	2. A	GPoštKE	26	7	9	-	-	-	9	0	51
17.	František Lami	4. A	GPoštKE	23	8	9	-	9	-	-	0	49
18.	Jozef Lukáč	3. C	GJiráBJ	26	9	5	7	-	-	2	0	49
19.	Alexander Ténai	2. A	GPoštKE	26	9	9	-	1	-	4	0	49
20.	Martin Sýkora	Oktáva B	GAlejCZ	0	9	9	6	9	4	9	0	46
21.	Patrik Lenárt	1. C	GParkKE	20	6	9	1	-	-	-	9	45
22.	Soňa Feciskaninová	Kvinta	GAlejKE	19	6	9	-	-	-	-	9	43
23.	Jakub Dargaj	3. A	GPoštKE	26	7	9	-	-	-	-	0	42
24.	Florián Hatala	2. A	GPoštKE	23	9	9	-	-	-	1	0	42
25.	Vladislav Vancák	Septima B	GAlejKE	27	6	9	-	-	-	-	0	42
26.	Zoltán Hanesz	9	ZKuzmKE	22	-	9	-	-	-	-	9	40

P.	Meno a priezvisko	Trieda	Škola	MS	1.	2.	3.	4.	5.	6.	P	CS
27.	Michal Korbela	Septima	GRadBN	34	-	-	-	-	-	-	0	34
28.	Václav Krchňák	1. A	GJaroCZ	18	8	-	-	-	-	-	8	34
29.	Vladimír Sabo	Septima B	GAlejKE	15	6	9	-	1	-	3	0	34
30.	Dorota Jarošová	Sexta	GAlejKE	15	5	9	-	-	-	4	0	33
31.	Lucia Leličová	2. A	GPoštKE	18	6	9	-	-	-	-	0	33
32.	Ján Dudič	4. A	GPoštKE	1	3	6	9	9	-	4	0	32
33.	Róbert Schönfeld	2. A	GPoštKE	18	9	-	-	-	-	4	0	31
34.	Viliam Valent	4. A	GPoštKE	0	7	9	-	9	-	4	0	29
35.	Alexandra Repíková	Kvinta A	GAlejKE	8	2	9	-	-	-	-	9	28
36.	Martin Rapavý	Septima A	GAlejKE	25	-	-	-	-	-	-	0	25
37.	Michal Buráň	Oktáva B	GUhBrCZ	0	8	9	-	-	-	7	0	24
38.	Martin Homa	4. A	GPoštKE	0	6	9	-	-	-	9	0	24
39.	Peter Kovács	Sexta	GAlejKE	24	-	-	-	-	-	-	0	24
40.	Daniel Pišťák	4. M	GDopplerCZ	-	6	9	-	-	-	8	0	23
41.	Anton Gromóczki	2. A	GPoštKE	9	4	9	-	-	-	-	0	22
42.	Alica Kačengová	4. B	GJavoSN	22	-	-	-	-	-	-	0	22
43.	Katarína Súčiková	1. A	GNovoBA	18	-	-	-	-	-	-	0	18
44.	Matúš Porázik	Septima A	GAlejKE	0	9	9	-	-	-	-	0	18
45.	Marek Fedák	2. B	GŠtúrSL	17	-	-	-	-	-	-	0	17
46.	Katarína Krajčiová	Sexta	GAlejKE	17	-	-	-	-	-	-	0	17
47.	Jana Kižiková	4. A	GPoštKE	16	-	-	-	-	-	-	0	16
48.	Josef Svoboda		FrýdlantCZ	0	-	-	-	9	-	7	0	16
49.	Vladimír Macko	4. A	GHronZV	13	-	-	-	-	-	-	0	13
50.	Tomáš Daneshjo	2. A	GPoštKE	9	-	-	-	-	-	-	0	9
51.	Martin Paľko	Septima B	GAlejKE	8	-	-	-	-	-	-	0	8
52.	Dávid Barbora	Sexta	GBernNB	5	-	-	-	-	-	-	0	5
53.	Dávid Chovanec	Sexta	GAlejKE	2	-	-	-	-	-	-	0	2
54.	Tereza Volavková	1. A	GPoštKE	2	-	-	-	-	-	-	0	2

Za podporu a spoluprácu ďakujeme

- Jednote slovenských matematikov a fyzikov, pobočka Košice
- Prírodovedeckej fakulte UPJŠ v Košiciach
- Agentúre na podporu výskumu a vývoja prostredníctvom projektu: LPP-0057-09 Rozvíjanie talentu prostredníctvom korešpondenčných seminárov a súťaží

Názov **STROM** – korešpondenčný matematický seminár
Číslo 3 • December 2012 • Zimný semester 37. ročníka (2012/2013)
Internet: `http://seminar.strom.sk`
E-mail: `strom@strom.sk`

Vydáva: Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice
Internet: `http://www.strom.sk`
E-mail: `zdruzenie@strom.sk`