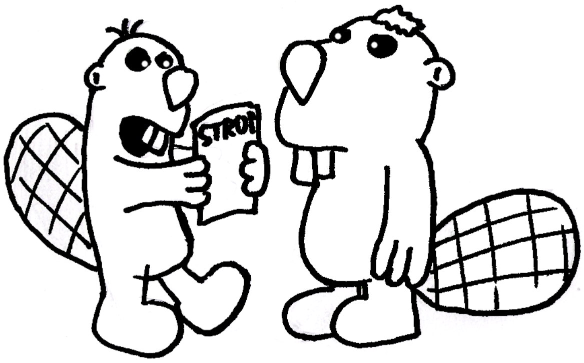
STROM

Korešpondenčný matematický seminár



Ahojte Stromáci,

Tento úvod tu nie je len tak. Pre vaše zuby je nesmierne dôležité, aby ste si ho prečítali. Prišli vám opravené riešenia, kopa bodov a pri pohľade na poradie po prvej sérii nejeden z vás vyceril od radosti zúbky, aj keď niektorí nimi možno namiesto toho radšej zaškrípali. Hlavné je, že si ich pravidelne čistíte aspoň dvakrát denne a počúvate na slovo svojho zubára. Tak teraz zoberte svoje zuby pevne do rúk a neľútostne sa zakusnite do ďalších úloh, ktoré sme si pre vás pripravili! Veľa zdaru a pevný chrup želajú

vaši **STROM**isti

Riešenia 1. série úloh Letného semestra 36. ročníka

1. Nájdite všetky prirodzené čísla k, pre ktoré medzi desiatimi po sebe idúcimi číslami

$$k+1, k+2, \ldots, k+10$$

je najviac prvočísel, ako môže byť.

Opravovali: Robčo Tóth a Dano Till **Počet riešiteľov: 39**

Riešenie:

Pre $k = 1$ dostávame prvočísel päť a pre $k = 2$ sú len štyri. Nech teraz $k > 2$. Medzi číslami $k+1$ až $k+10$ je práve 5 nepárnych a 5 párnych čísel. Všetky párne čísla až na 2 nie sú prvočísla, takže prvočíslami môžu byť iba nepárne čísla, teda ich môže byť maximálne 5 (lebo 2 sa tam nenachádza). O násobkoch trojky vieme, že každé tretie nepárne číslo je násobkom trojky, takže aspoň jedno z našich nepárnych čísel je deliteľné tromi, teda v tejto desatici za sebou idúcich čísel môžu byť maximálne 4 prvočísla (výnimkou je trojka, ale tá sa tam tiež nenachádza). Preto jediným riešením je $k = 1$. Namiesto deliteľnosti tromi sa rovnako dobre dala použiť aj deliteľnosť piatimi.

Komentár: Úloha bola ľahká, ale veľmi veľa z vás postrácalo body kvôli tej diabolskej trojke, ktorá je deliteľná tromi a predsa je prvočíslom! Nabudúce si dobre premyslite, či vaše tvrdenie platí naozaj všeobecne alebo či treba zvlášť ošetriť nejaké prípady.

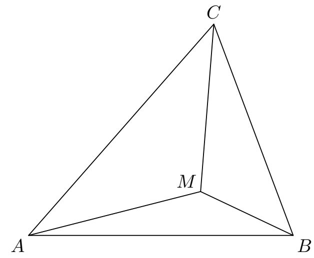
2. Zostrojte bod M vnútri daného trojuholníka ABC tak, aby $S_{ABM} : S_{BCM} : S_{ACM} = 1 : 2 : 3$.

Opravovali: Edo Eiben **Počet riešiteľov: 31**

Riešenie:

Bod M má ležať vnútri trojuholníka ABC, a tak si z náčrtu môžeme všimnúť, že $S_{ABM} + S_{BCM} + S_{ACM} = S_{ABC}$. Spojením s $S_{ABM} : S_{BCM} : S_{ACM} = 1 : 2 : 3$ dostávame

$$S_{ABM} = \frac{S_{ABC}}{6}$$
$$S_{BCM} = \frac{S_{ABC}}{3}$$
$$S_{ACM} = \frac{S_{ABC}}{2}.$$



Trojuholníky ABM, BCM, ACM majú s trojuholníkom ABC každý spoločnú jednu stranu a to postupne AB, BC, AC. Keďže obsah trojuholníka je $s \cdot v_s/2$, kde s je dĺžka strany a v_s je dĺžka výšky na túto stranu, tak vieme, že trojuholník ABM bude mať šestinovú výšku na stranu AB oproti ABC, trojuholník BCM tretinovú výšku na stranu BC a ACM polovičnú na stranu AC.
Teda množina bodov M takých, aby $S_{ABM} = S_{ABC}/6$, je rovnobežka so stranou AB a vzdialenosťou od AB šestina výšky na AB. Množina bodov M takých, že $S_{BCM} = S_{ABC}/3$, je rovnobežka so stranou BC a vzdialenosťou od BC tretina výšky na BC. Tieto priamky majú jeden priesečník, keďže nie sú rovnobežné. Označme si ho M'. Ak je obsah trojuholníka ACM' polovica obsahu trojuholníka ABC, tak sme našli hľadaný bod.
Vieme, že

$$S_{ABM'} + S_{BCM'} + S_{ACM'} = S_{ABC}$$
$$S_{ACM'} = S_{ABC} - S_{ABM'} - S_{BCM'}$$

Z toho, ako sme zostrojili M', platí $S_{ABM'} = S_{ABC}/6$ a $S_{BCM'} = S_{ABC}/3$, a teda

$$S_{ACM'} = S_{ABC} - \frac{S_{ABC}}{6} - \frac{S_{ABC}}{3} = \frac{S_{ABC}}{2}.$$

Na to, aby sme naozaj zostrojili bod M, musíme už iba vedieť nájsť šestinu (alebo inú časť) výšky a zostrojiť rovnobežku s danou vzdialenosťou, čo šikovný riešiteľ už zvládne aj sám :-).

Iné riešenie:
Ako prvé si uvedomíme, že množina bodov X takých, že $S_{ABX} : S_{BCX} = 1 : 2$, je priamka prechádzajúca vrcholom B a bodom P na strane AC, pre ktorý platí $|AP| : |PC| = 1 : 2$. Vyplýva to z toho, že trojuholníky APX a PCX majú spoločnú výšku, teda pomer ich obsahov je $|AP| : |PC| = 1 : 2$, taktiež pomer obsahov trojuholníkov APB a PCB je $|AP| : |PC| = 1 : 2$. Keďže $S_{ABX} = S_{ABP} - S_{APX}$ a $S_{BCX} = S_{BCP} - S_{CPX}$, tak aj $S_{ABX} : S_{BCX} = 1 : 2$. Aby sme boli úplne dôslední, bolo by dobré navyše ukázať, že ak si vezmeme bod Y vo vnútri trojuholníka ABC (lebo nás zo zadania zaujímajú iba takéto body), ktorý neleží na tejto priamke, tak nemôžeme dostať tento pomer obsahov. To ukážeme napríklad tak, že si vezmeme priamku BY, jej prienik s AC si označíme Q a už vieme, že $S_{ABX} : S_{BCX} = |AQ| : |QC|$. Ak $|AQ| : |QC| = 1 : 2$, tak buď je Q mimo úsečky AC, tým pádom Y je mimo trojuholníka ABC, alebo $Q = P$, a teda Y leží na priamke AP.
Z rovnakého dôvodu je množina takých bodov X, že $S_{ABX} : S_{ACX} = 1 : 3$, priamka prechádzajúca vrcholom A a bodom R na BC takým, že $|BR| : |RC| = 1 : 3$. A prienik týchto dvoch priamok bude práve bod M, pre ktorý platí $S_{ABM} : S_{BCM} : S_{ACM} = 1 : 2 : 3$.
Teda postup konštrukcie by vyzeral zhruba nasledovne:

1. P; $P \in AC$, $|AP| : |PC| = 1 : 2$

2. R; $R \in BC$, $|BR| : |RC| = 1 : 3$

3. M; $M = PB \cap AR$

Komentár: Úlohu väčšina z vás zvládla. Jediná vec, na ktorú by som upozornil, je, že tri priamky nemusia mať jeden priesečník. Preto tí, čo spravili tri rovnobežky so stranami v správnych vzdialenostiach, nemohli bez ďalšieho komentára prehlásiť, že bod M je ich prienikom.

3. V Kráľovstve leteckom je m miest, v každom jedno letisko. Medzi niektorými mestami existujú letecké linky, medzi niektorými nie. Inak ako lietadlami sa tu nedá prepravovať. Ďalej tu platia dve zvláštnosti. Ak by ste zrušili hociktorú linku, stále sa bude dať z každého mesta dostať do každého. Ak by ste však zrušili ľubovoľné dve linky, prestalo by to platiť. Koľko je v Kráľovstve leteckom leteckých liniek?

Opravovali: Peťo Milošovič a Ivka Gašková **Počet riešiteľov: 31**

Riešenie:

Prepokladajme, že sa v našom kráľovstve našlo mesto, ktoré je spojené s okolím práve jednou linkou. Potom stačí, aby sme práve túto zrušili a už by neplatila prvá zo zvláštností. Preto musí každé letisko zabezpečovať aspoň dve linky. Čo ak niektoré z miest disponuje aspoň troma linkami? Nazvime si toto mesto M a mestá na druhom konci troch liniek pomenujme N, O a P. Keby sa z niektorého z troch miest dalo dostať do zvyšných dvoch len cestou cez M, zrušením tejto linky by bolo zjavné, že v takomto kráľovstve neplatí prvá zo zvláštností. Preto medzi nimi musí existovať aj nejaká alternatívna cesta nevyužívajúca M. Ak však chceme, aby platila aj druhá zvláštnosť, tak po zrušení hociktorých dvoch z liniek medzi M a trojicou N, O a P sa musíme ocitnúť v situácii, kedy už nie je možné cestovať z ľubovoľného mesta do hociktorého iného. V tej sa však neocitáme, keďže medzi troma mestami existuje cesta, ktorá cez mesto M neprechádza a samotné mesto M je spojené s jedným z trojice N, O, P. V našom kráľovstve teda nemôže existovať mesto, ktoré je spojené s ostatnými aspoň troma linkami. Spojením s predošlým poznatkom o minimálnom počte týchto liniek vlastne dostávame, že v každom meste sa dá cestovať do kráľovstva práve dvoma linkami. Koľko je liniek spolu vyrátame jednoducho sčítaním počtu liniek z jednotlivých miest (ten je v tomto prípade pre všetky rovnaký) a následným predelením dvoma (každá linka spája dve mestá a tak sme každú z nich zarátali dvakrát). V našom kráľovstve je teda počet liniek rovný počtu miest a tých je m.

Komentár: K správnemu počtu liniek ste sa dopracovali všetci, jeho uspokojivé odôvodnenie však poskytli iba niektorí. Nestačí povedať, že z prvej podmienky nám vyplýva toto a z druhej tamto, je potrebné aj vysvetliť ako. Nikdy nezaškodí si takúto úlohu vyskúšať najprv pre nejaké malé konkrétne hodnoty počtu miest a takisto dobrý obrázok situácie určite riešeniu neublíži.

4. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n je číslo zapísané v desiatkovej sústave 3^n rovnakými číslicami deliteľné číslom 3^n.

Opravovali: Peťo Milošovič a Matúš Stehlík **Počet riešiteľov: 20**

Riešenie:

Každé číslo zapísané 3^n rovnakými číslicami c vieme napísať ako c násobok čísla zapísaného 3^n jednotkami (napr. $555 = 5 \cdot 111$). Preto stačí tvrdenie dokázať pre čísla pozostávajúce z 3^n jednotiek. Pre jednoduchosť označme $X(n)$ číslo zapísané 3^n jednotkami (napr. $X(2) = 111111111$).
Chceme dokázať, že $3^n \mid X(n)$ pre všetky prirodzené čísla n. Tvrdenie dokážeme matematickou indukciou vzhľadom na n.

1. Pre $n = 1$ tvrdenie platí, lebo máme $X(1)/3^1 = 111/3 = 37$.

2. Predpokladajme, že $3^n \mid X(n)$. Dokážeme, že $3^{n+1} \mid X(n+1)$. Všimnime si, že $X(n+1)$ je len trikrát za sebou napísané číslo $X(n)$, čiže

$$X(n+1) = X(n) + 10^{3^n} X(n) + 10^{3^{2n}} X(n) = X(n) \cdot (1 + 10^{3^n} + 10^{3^{2n}}).$$

Táto rovnosť sa dá vidieť z toho, ako tieto tri čísla vyzerajú alebo vydelením $X(n+1)/X(n)$. V tomto momente už vidno, že sme na konci, lebo z indukčného predpokladu máme, že $3^n \mid X(n)$ a z kritéria deliteľnosti 3 platí $3 \mid 1 + 10^{3^n} + 10^{3^{2n}}$ (lebo má ciferný súčet 3). Teda $X(n+1)$ je súčinom čísla deliteľného 3^n a čísla deliteľného 3, z čoho vyplýva, že $3^{n+1} \mid X(n+1)$.

Komentár: Úloha nebola ťažká, všetky správne riešenia využívali indukciu takmer rovnako ako vzorové riešenie. Táto úloha napovedá, že by sa dala zovšeobecniť na: ciferný súčet čísla deliteľný 3^n, práve vtedy keď je dané číslo deliteľné 3^n (resp. len jedna z implikácií). Toto tvrdenie však **neplatí**! Platí len pre $n = 1$ a $n = 2$, čo poznáme ako kritériá deliteľnosti 3 a 9. Niektoré riešenia stroskotali práve na využívaní tohto "zovšeobecnenia." Skúste dokázať, že pre žiadne iné n tvrdenie už neplatí.

5. Zistite, či existujú také reálne čísla b, c, že obidve kvadratické rovnice s neznámou x, resp. y

$$\begin{aligned} x^2 + bx + c &= 0, \\ 2y^2 + (b+1)y + c + 1 &= 0 \end{aligned}$$

majú dva celočíselné korene. Svoju odpoveď zdôvodnite.

Opravovali: Janka Baranová a Robčo Tóth **Počet riešiteľov: 14**

Riešenie:

V zadaní máme dve kvadratické rovnice, ktoré majú mať dva celočíselné korene. Ak rovnice majú „pekné“ korene, zvykneme ich akosi „odhadnúť“. Tento náš odhad je na základe tzv. Vietových vzťahov. Čo to tie Vietove vzťahy vlastne sú? Máme kvadratickú rovnicu v tvare $ax^2 + bx + c = 0$. Potom pre korene x_1, x_2 (ak existujú) platí:

$$\begin{aligned} x_1 x_2 &= \frac{c}{a} \\ -(x_1 + x_2) &= \frac{b}{a} \end{aligned}$$

(Uvedené vzťahy skúste odvodiť sami. Nie je to ťažké, stačí využiť, že ľavá strana kvadratickej rovnice sa dá napísať v tvare $a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$.)

Tieto vzťahy teraz napíšeme pre obe naše rovnice. Nech teda x_1, x_2 sú korene prvej a x_3, x_4 korene druhej rovnice. Podľa Vietových vzťahov potom máme:

$$\begin{aligned} x_1 x_2 &= c \\ -(x_1 + x_2) &= b \\ x_3 x_4 &= \frac{c+1}{2} \\ -(x_3 + x_4) &= \frac{b+1}{2} \end{aligned}$$

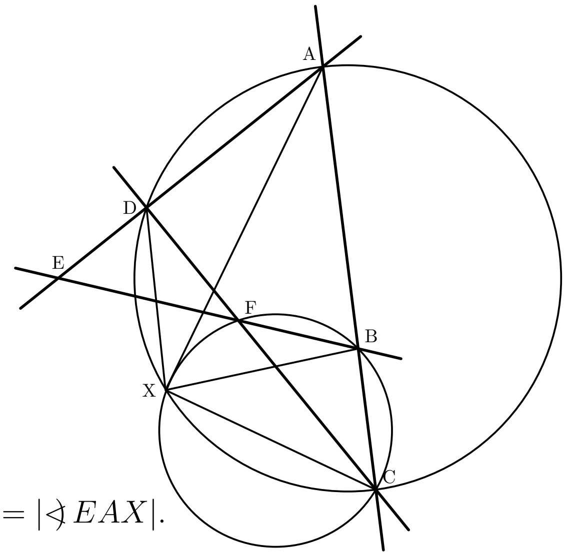
Predpokladáme, že existujú b a c také, aby všetky štyri korene boli celé čísla (a pokúšame sa ich nájsť). Pozrime sa na druhú dvojicu vzťahov. Keďže korene majú byť celočíselné, tak aj ľavé strany rovníc sú celé (súčet a súčin celých čísel). Z toho dôvodu b a c musia byť nepárne čísla (ak by bolo aspoň jedno z nich párne, tak by neexistovali celočíselné korene).

A teraz späť na prvú dvojicu vzťahov. Súčin aj súčet koreňov (dvoch celých čísel) má byť nepárne číslo. To však nie je možné, pretože súčin dvoch celých čísel je nepárny len vtedy, ak obe čísla sú nepárne. Potom by však ich súčet bol párny, čo je v rozpore s tým, že b aj c sú nepárne čísla. Preto neexistujú také b a c, aby korene týchto dvoch rovníc boli celočíselné.

Komentár: Úlohu ste hravo zvládli. Každý, kto použil Vietove vzťahy, úlohu vyriešil na plný počet bodov. Ste super, len tak ďalej.

6. Dané sú štyri navzájom rôznobežné priamky v rovine, z ktorých žiadne tri neprechádzajú tým istým bodom. Tieto priamky určujú štyri trojuholníky.
a) Dokážte, že kružnice opísané týmto štyrom trojuholníkom prechádzajú spoločným bodom X.
b) Dokážte, že stredy opísaných kružníc týmto trojuholníkom ležia na kružnici prechádzajúcej bodom X.

Opravovali: Matúš Stehlík **Počet riešiteľov: 5**



Riešenie:

(podľa *Martina Vodičku* a *Lucie Magurovej*) Označme priesečníky priamok A, B, C, D, E a F tak, ako na obrázku. Situácia vyzerá vždy takto, až na to, že niektoré uhly môžu byť tupé (alebo ostré) namiesto ostrých (resp. tupých), lebo tri "vonkajšie" priamky vždy tvoria trojuholník a tá štvrtá ho pretína.

a) Nech X je priesečník kružníc opísaných trojuholníkom ACD a CBF rôzny od C (musí existovať, lebo inak by AD a BF boli rovnobežné). S využitím tetivových štvoruholníkov $XCAD$ a $XFCB$ máme

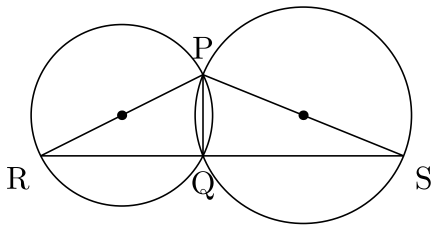
$$|\sphericalangle EBX| = |\sphericalangle FBX| = |\sphericalangle FCX| = |\sphericalangle DCX| = |\sphericalangle DAX| = |\sphericalangle EAX|.$$

Takže $|\sphericalangle EBX| = |\sphericalangle EAX|$, preto je $ABXE$ tetivový a X leží na kružnici opísanej ABE.
Podobne s využitím tetivových štvoruholníkov $ABXE$ a $XCAD$ máme

$$|\sphericalangle FEX| = |\sphericalangle BEX| = |\sphericalangle BAX| = |\sphericalangle CAX| = |\sphericalangle CDX| = |\sphericalangle FDX|.$$

Takže $|\sphericalangle FEX| = |\sphericalangle FDX|$, preto je $FDEX$ tetivový a X leží na kružnici opísanej FDE.
Preto kružnice opísané trojuholníkom BCF, ACD, FDE a ABE prechádzajú spoločným bodom X.

b) Najprv si dokážeme pomocné tvrdenie.



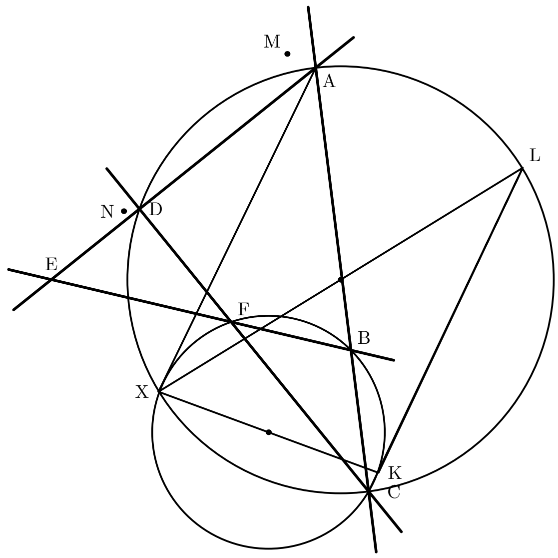
Lema: Majme dve kružnice k_1, k_2, ktoré sa pretínajú v rôznych bodoch P a Q. Nech R, S sú také body na kružniciach k_1, k_2, že RP je priemerom k_1 a SP je priemerom k_2. Potom body Q, R, S ležia na priamke.

Dôkaz lemy: Kružnice k_1, k_2 sú Tálesove kružnice nad priemermi PR, PS, preto $|\sphericalangle PQR| = |\sphericalangle PQS| = 90°$. Ak R, S ležia v jednej polrovine vzhľadom na PQ, tak z predošlej rovnosti máme, že Q, R, S ležia na priamke. Ak body R, S ležia v rôznych polrovinách vzhľadom na PQ, tak $|\sphericalangle SQR| = 180°$ a body S, Q, R ležia na priamke.

Nech K, L, M, N sú postupne také body na kružniciach opísaných trojuholníkom CBF, ACD, ABE, FDE, že XK, XL, XM, XN sú ich priemery (z predošlej časti vieme, že X je spoločným bodom týchto kružníc). Platia nasledujúce vzťahy (prvá rovnosť vyplýva vždy z lemy a druhá z obvodových uhlov):

$$|\sphericalangle XLK| = |\sphericalangle XLC| = |\sphericalangle XAC|$$
$$|\sphericalangle XNK| = |\sphericalangle XNF| = |\sphericalangle XEF|$$
$$|\sphericalangle XMK| = |\sphericalangle XMB| = |\sphericalangle XEB|.$$

Ak pri použití lemy v predošlých rovnostiach má jedna kružnica stred vo vnútornej oblasti druhej, tak by prostredný uhol musel byť susedný k uvedenému, ale v ďalšej rovnosti by sme pri obvodových uhloch tiež brali susedný k uvedenému, takže rovnosť krajných uhlov to nezmení. Lenže o pravých stranách týchto rovností vieme, že sa rovnajú keďže $|\sphericalangle XAC| = |\sphericalangle XAB|$ (lebo A, B, C ležia na priamke), $|\sphericalangle XAB| = |\sphericalangle XEB|$ (sú obvodové) a $|\sphericalangle XEB| = |\sphericalangle XEF|$ (lebo E, F, B ležia na priamke). Preto sa musia rovnať aj ľavé strany, čiže $|\sphericalangle XNK| = |\sphericalangle XMK| = |\sphericalangle XLK|$, teda body X, K, L, M, N ležia na kružnici. Zobrazením tejto kružnice v rovnoľahlosti so stredom v bode X a koeficientom $1/2$ sa body K, L, M, N zobrazia na stredy kružníc opísaných trojuholníkom, ktoré tvoria priamky zo zadania. Takže stredy týchto kružníc ležia na kružnici.



Komentár: Celú úlohu sa podarilo vyriešiť iba Maťovi Vodičkovi a Lucke Magurovej. Za zmienku stojí aj riešenie Filipa Hanzelyho, ktorý vyriešil iba časť a). V úlohe bolo potrebné na istých miestach urobiť diskusiu prípadov, čo súvisí s tým, že bola dosť všeobecne zadaná. Časť a) bola skôr návodom k časti b), bez neho by bola úloha asi ťažšia. Veľmi zaujímavý a poučný bol trik s rovnoľahlosťou, vďaka nemu sme mohli najprv tvrdenie dokázať pre iné body (o ktorých sme už vedeli veľa vecí) a až potom sme celú situáciu zobrazili na to, čo potrebujeme.

2 Druhá séria

Termín odoslania riešení: **30. 4. 2012**

1. Daných je päť bodov P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 vo vnútri štvorca so stranou dĺžky 1. Dokážte, že aspoň jedna zo všetkých vzdialeností týchto bodov je menšia ako $\sqrt{2}/2$.

2. Pre ktoré n existuje n navzájom rôznych prirodzených čísel takých, že sa dajú usporiadať do kruhu tak, aby podiel každých dvoch susedných čísel (väčšie delené menším) bol prvočíslo? Nájdite všetky takéto n a ukážte, prečo iné nevyhovujú.

3. Na tanečnom večierku boli chlapci a dievčatá. Každý chlapec tancoval s aspoň jedným dievčaťom, ale nie so všetkými. Každé dievča tancovalo s aspoň jedným chlapcom, ale nie so všetkými. Dokážte, že sa vždy dajú vybrať dvaja chlapci a dve dievčatá tak, že každý z vybratých chlapcov tancoval s práve jedným z vybratých dievčat a každé z vybratých dievčat tancovalo s práve jedným z vybratých chlapcov.

4. Daná je kružnica k a jej tetiva AB.
a) Nájdite na kružnici bod C taký, že obsah trojuholníka ABC je maximálny.
b) Nájdite na kružnici bod D taký, že obvod trojuholníka ABD je maximálny.
c) Nájdite trojuholník XYZ, ktorý je vpísaný do kružnice k a má najväčší možný obvod.

5. Každá strana konvexného štvoruholníka je rozdelená na osem zhodných úsečiek. Spojíme príslušné body na protiľahlých stranách a vznikne šachovnica. Políčka vyfarbíme ako na skutočnej šachovnici. Dokážte, že čierna a biela plocha majú rovnaký obsah.

6. Nech pre $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ platí $f(0) = 1/2$ a zároveň pre nejaké reálne číslo a platí

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(a-y) + f(y) \cdot f(a-x) \qquad \text{pre všetky reálne } x,\ y.$$

Dokážte, že f je konštantná funkcia.

Poradie po 1. sérii Letného semestra 36. ročníka

P.	Meno a priezvisko	Trieda	Škola	1.	2.	3.	4.	5.	6.	H	CS
1.	Martin Vodička	Septima	GAlejKE	9	9	9	9	9	9	0	54
2.	Jakub Dargaj	2. A	GPoštKE	8	9	9	9	9	-	0	52
2.	Katarína Krajčiová	Kvinta	GAlejKE	8	9	9	8	9	-	0	52
2.	Marko Puza	2. A	GPoštKE	9	9	9	8	9	-	0	52
5.	Miroslav Stankovič	2. A	GPoštKE	9	7	9	9	9	-	0	50
6.	Filip Hanzely	Septima	GKomeSB	9	9	9	9	9	3	0	48
7.	Jozef Janovec	Kvinta	GAlejKE	8	7	9	2	9	-	0	44
8.	Alexander Ténai	1. A	GPoštKE	9	-	1	9	9	-	0	37
9.	Vladimír Macko	3. A	GHronZV	9	9	8	9	-	-	0	35
9.	Matúš Hlaváčik	Septima	GAlejKE	8	9	9	9	-	-	0	35
11.	Lucia Magurová	3. A	GPoštKE	9	7	-	9	-	9	0	34
11.	Samuel Súčik	1. CG	GNovoBA	9	7	9	-	-	-	0	34
13.	Filip Unoka	3. A	GPoštKE	9	9	6	9	-	-	0	33
14.	Kristína Faguľová	4. A	GPoštKE	9	9	3	2	9	-	0	32
14.	Irena Bačinská	Sexta	GKomeLY	7	7	9	-	9	-	0	32
16.	Dorota Jarošová	Kvinta	GAlejKE	9	7	4	2	-	-	0	31
16.	Richard Trembecký	Septima	GAlejKE	9	9	4	9	-	-	0	31
18.	Viktória Valachová	2. A	GŠkolSN	8	7	3	-	9	-	0	27
18.	František Lami	3. A	GPoštKE	6	5	-	8	-	-	0	27
20.	Martin Rapavý	Sexta A	GAlejKE	8	9	-	9	-	-	0	26
20.	Peter Kovács	Kvinta	GAlejKE	7	7	3	2	-	-	0	26
22.	Róbert Schönfeld	1. A	GPoštKE	9	7	-	-	-	-	0	25
22.	Ján Jursa	2. A	GPoštKE	-	8	8	-	9	-	0	25
24.	Adam Ulanovský	3. A	GPoštKE	5	7	3	9	-	-	0	24
25.	Daniel Suchý	Kvinta	GGrösBA	8	7	-	-	-	-	0	23
26.	Matěj Židek	9.	ZFrydCZ	9	-	4	-	-	-	0	22
26.	Anton Gromóczki	1. A	GPoštKE	6	-	4	-	6	-	0	22
28.	Ján Špak	2. A	GŠkulKE	5	7	2	-	-	0	0	21
28.	Lucia Leličová	1. A	GPoštKE	6	7	1	-	-	-	0	21
30.	Patrícia Lakatošová	1. B	GZbroKE	8	-	4	-	-	-	0	20
31.	Martina Oravcová	2. A	GPoštKE	8	7	4	-	-	-	0	19
32.	Florián Hatala	1. A	GPoštKE	8	-	2	-	-	-	0	18
32.	Dávid Kancián	Septima	GAlejKE	8	7	3	-	-	-	0	18
34.	Marcel Češelka	3. C	GŠkulKE	9	-	8	-	-	-	0	17
34.	Kristína Komanová	3. C	GKomeBB	6	9	2	-	-	-	0	17
36.	Janka Muchinová	2. B	GŠkulKE	2	5	-	-	1	0	0	13
37.	Jana Kižiková	3. A	GPoštKE	2	5	3	1	-	-	0	11
38.	Karolína Šromeková	2. C	GTataPP	9	-	-	-	-	-	0	9
39.	Ján Dudič	3. A	GPoštKE	0	5	2	-	-	-	0	7
40.	Mojmír Stehlík	Septima B	GTr12KE	6	-	-	-	-	-	0	6

Pohár konštruktérov Letného semestra 36. ročníka

P.	Skratka	Škola	P
1.	GPoštKE	Gymnázium Poštová 9 042 52 Košice	1
2.	GAlejKE	Gymnázium Alejová 1 041 49 Košice	[illegible]
3.	GŠkulKE	Evanjelické gymnázium Škultétyho 10 040 01 Košice	[illegible]
4.	GKomeSB	Gymnázium Komenského 40 083 01 Sabinov	[illegible]
5.	GHronZV	Gymnázium Hronská 1467/3 960 01 Zvolen	[illegible]
6.	GNovoBA	Gymnázium J. Hronca Novohradská 1 821 09 Bratislava 2	[illegible]
7.	GKomeLY	Gymnázium Komenského 13 082 71 Lipany	[illegible]
8.	GŠkolSN	Gymnázium Školská 7 052 01 Spišská Nová Ves	[illegible]
9.	GGrösBA	Gymnázium Grösslingova 18 811 09 Bratislava 1	[illegible]
10.	ZFrydCZ	Základní škola T.G.M, Náměstí T. G. Masaryka 1260 739 11 Frýdlant nad Ostravicí	[illegible]
11.	GZbroKE	Gymnáz. sv.T.Akvinského Zbrojničná 3 040 01 Košice	[illegible]
12.	GKomeBB	Gymnázium J. A. Komenského 18 974 01 Banská Bystrica	[illegible]
13.	GTataPP	Gymnázium Dominika Tatarku 14 058 19 Poprad	[illegible]
14.	GTr12KE	Gymnázium Trebišovská 12 040 11 Košice	[illegible]

Za podporu a spoluprácu ďakujeme

- Jednote slovenských matematikov a fyzikov, pobočka Košice
- Prírodovedeckej fakulte UPJŠ v Košiciach
- Agentúre na podporu výskumu a vývoja prostredníctvom projektu:
  LPP-0057-09 Rozvíjanie talentu prostredníctvom korešpondenčných seminárov a súťaží

Názov **STROM** – korešpondenčný matematický seminár
Číslo 5 • Apríl 2012 • Letný semester 36. ročníka (2011/2012)
Internet: http://seminar.strom.sk
E-mail: strom@strom.sk

Vydáva: Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice
Internet: http://www.strom.sk
E-mail: zdruzenie@strom.sk