STROM

Korešpondenčný matematický seminár

Čaaaaaaaau Stromáci!

Úvod uvádzajú usmievaví ufóni utekajúcim, úlohami unaveným účastníkom. A okrem toho – teraz, keď už držíte v rukách tento nový časopis, sa vaši super vedúci snažia dolúštiť posledné riešenia a vytvoriť poradie tých najlepších, ktorí sa už teraz môžu tešiť na sústredenie. Dúfame, že vzorové riešenia vám padnú za úžitok a poučíte sa z vlastných, ale aj cudzích chýb. Poradie nasvedčuje, že úlohy zas neboli tak jednoduché, keďže plný počet nikto nezískal a posledné prekvapenie na záver – zmena na prvom mieste. Blahoželáme!

Vaši **STROM**isti

Riešenia 1. série úloh Letného semestra 35. ročníka

1. Zostrojte rovnobežník $ABCD$, ak sú dané vrcholy A a C a päta P kolmice z bodu D na os vnútorného uhla DAB. Nezabudnite určiť, koľko riešení má úloha v závislosti od vzájomnej polohy bodov A, C a P.

Opravovali: Tinka Hlavatá a Ján „Mazo“ Mazák **Počet riešiteľov: 31**

<u>**Riešenie:**</u>

V riešení budeme predpokladať, že zadané body A a C sú rôzne (inak sa rovnobežník $ABCD$ nedá zostrojiť). Ak sú body A a P rôzne, budeme priamku prechádzajúcu bodom P a kolmú na priamku PA označovať p. Stred úsečky AC označíme S. Počet riešení závisí od vzájomnej polohy bodov A, C a P, preto rozoberieme niekoľko prípadov:

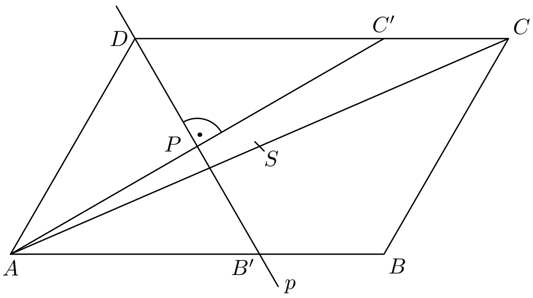
1. Bod P leží na priamke AC:

Ak by bol bod P totožný s bodom A, nemala by úloha riešenie (premyslite si), preto sa obmedzíme iba na bod P rôzny od A. V akomkoľvek vyhovujúcom rovnobežníku $ABCD$ je bod S stredom uhlopriečky BD. V trojuholníku DAB by potom priamka AP bola zároveň osou uhla aj ťažnicou, čiže by tento trojuholník bol rovnoramenný a priamka AP by bola aj výškou. Preto možno rovnobežník v tomto prípade zostrojiť len vtedy, keď je bod P totožný s bodom S. Riešení dokonca dostaneme nekonečne veľa: bod D musí ležať na priamke p, ale nie na priamke AC; pre hocijaký takýto bod D dostaneme vyhovujúci bod B ako obraz bodu D v stredovej súmernosti podľa S.

2. Bod P neleží na priamke AC:

Predpokladajme, že sme pre dané body A, C a P zostrojili vyhovujúci rovnobežník $ABCD$. Označme C' priesečník priamky AP s priamkou CD (prečo existuje?). Uhly BAC' a $AC'D$ sú striedavé, preto sú zhodné, čiže sú zhodné aj trojuholníky DPA a DPC' (majú spoločnú stranu a dve dvojice zhodných uhlov). Bod P je preto stredom úsečky AC'; to nám umožňuje zostrojiť bod C' pre akúkoľvek polohu bodu P mimo priamky AC.

Ako nám pomôže bod C'? Bod D vieme zostrojiť ako priesečník priamky CC' s priamkou p. Tu môže nastať niekoľko problémov.



V prvom rade môžu byť priamky CC' a p rovnobežné; to nastane pre bod C' ležiaci na Tálesovej kružnici nad priemerom AC, čiže pre bod P ležiaci na Tálesovej kružnici nad priemerom AS. Vtedy úloha riešenie nemá. (Nájdite podrobné zdôvodnenie.)
Aj keby priamky CC' a p rovnobežné neboli, máme problém, ak ich priesečníkom je bod C (čiže ak uhol CPA je pravý). Bod D by bol potom totožný s bodom C a žiaden vyhovujúci rovnobežník $ABCD$ by sme nedostali. Nakreslite si situáciu, kde body C aj D ležia na priamke p. Bod B potom musí ležať na rovnobežke s priamkou p prechádzajúcou bodom A. V takejto situácii však priamka AP je kolmá na AB a nikdy nebude osou uhla BAD.
Ostáva prípad, keď sa nám naozaj podarí zostrojiť bod D ako priesečník priamky CC' s priamkou p. Bod B vieme ľahko zostrojiť ako obraz bodu D v stredovej súmernosti so stredom S.

Teraz prichádza čas na *dôkaz správnosti konštrukcie*:
Najprv ukážeme, že zostrojený bod D neleží na priamke AC. Keby tam ležal, tak priamky CC' a CA sú totožné, čiže body C' a P by ležali na priamke AC. Bod P tam však neleží. V zostrojenom štvoruholníku $ABCD$ sa uhlopriečky rozpoľujú, preto je to rovnobežník.
Poslednou podmienkou zo zadania je, že bod P má byť pätou kolmice z bodu D na os vnútorného uhla BAD. To vlastne znamená, že uhly DAP a BAP sú zhodné. Označme B' priesečník priamky p s priamkou AB (existuje, pretože existuje priesečník priamky p s priamkou CD rovnobežnou s AB). Pre polohu bodu B' môžu nastať dve možnosti: buď leží na polpriamke AB, alebo na polpriamke k nej opačnej.
Prvý prípad nastáva, keď bod C' leží na polpriamke DC. Vtedy sú trojuholníky APD a APB' zhodné podľa vety sus: oba sú pravouhlé a majú spoločnú stranu AP, navyše $|DP| = |PB'|$, lebo úsečka PS je strednou priečkou v trojuholníku $DB'B$ (je rovnobežná s úsečkou CC', preto aj s úsečkou BB', navyše prechádza stredom S strany BD).
Druhý prípad nastáva, keď bod C' leží na polpriamke opačnej k DC. Body P a C' ležia v tej istej polrovine vzhľadom k priamke AD, preto v tomto prípade bod P bude ležať v polrovine ADC', ktorá je opačná k polrovine ADC. Z toho hneď vidno, že bod P je mimo rovnobežníka $ABCD$, preto nemôže byť pätou na os vnútorného uhla. Čiže v tomto prípade úloha vôbec nemá riešenie; bolo by vhodné popísať, kedy to nastane, pomocou polohy bodov A, P a C: no vtedy, keď bod C' leží v polrovine opačnej k pA, čiže bod C leží v polrovine pA.

Komentár: Konštrukčné úlohy majú niekoľko podstatných častí, ktoré nie je vhodné vynechať. Cieľom *rozboru* je nájsť dostatok nutných podmienok, ktoré musia konštruované body spĺňať a potom tieto podmienky využiť pri konštrukcii. Napríklad zistíme, že bod X musí ležať na priamke p a navyše kružnici k. Preto ho zostrojíme ako priesečník priamky p s kružnicou k. Tu môžu nastať dva problémy: jednak sa priamka p s kružnicou k vôbec nemusia pretnúť (*diskusia* o počte riešení by mala popísať počet riešení v závislosti od polohy zadaných bodov, vzdialeností či iných konštrukčných prvkov), jednak bod X, ktorý vznikne ako priesečník p a k, nemusí vyhovovať ostatným podmienkam v zadaní. Preto sa robí *dôkaz správnosti konštrukcie*, kde zdôvodníme, prečo zostrojený útvar naozaj vyhovuje všetkým podmienkam zadania. Inak povedané, treba ukázať, že nájdené nutné podmienky sú aj postačujúce.
V tejto úlohe mal byť bod P pätou kolmice z bodu D na os *vnútorného* uhla BAD. Často sa vám podarilo zostrojiť rovnobežník $ABCD$ tak, že bod P bol pätou na os vonkajšieho uhla. O dôkaz správnosti konštrukcie ste sa vôbec nepokúšali…
V uvedenom riešení sú jednotlivé časti (rozbor, diskusia, …) trocha pomiešané. Bolo by možné prezentovať ich oddelene a v učesanej podobe, potom by však niektoré podmienky „spadli z neba“ – radšej sme sa rozhodli ukázať vám, ako sa dajú postupne všetky objaviť.

2. Jožko má doma na poličke v rade uložených desať šálok. Pod dvomi susednými šálkami je po jednej minci a žiadne iné mince sa pod šálkami nenachádzajú. Anička si hneď vybrala niekoľko šálok a opýtala sa, koľko mincí je dokopy pod nimi. Jožko jej však povedal, nech si radšej najprv napíše dve takéto otázky na papier a až potom jej na obidve pravdivo odpovie. Vie Anička takýmto spôsobom vždy zistiť, kde sa nachádzajú spomínané mince?

Opravovali: Gaba Vozáriková a Veronika Kopčová **Počet riešiteľov: 36**

Riešenie:

Úloha sa dá riešiť metódou pokus-omyl, ale skúsme si ju trošku sformalizovať. Najprv sa zamyslime nad tým, či je vôbec teoreticky možné nájsť hľadané otázky zo zadania. Možných dvojíc pohárov, pod ktorými sa môžu mince nachádzať je 9. Možných kombinácií odpovedí na otázky je tiež 9. Teda máme aspoň šancu, že tie otázky môžeme nájsť.

Potrebujeme teda nájsť dvojicu otázok, ktorá každej možnej dvojici pohárov priradí jednoznačnú dvojicu odpovedí. Užitočné preto bude reprezentovať otázky nie ako množiny pohárov, na ktoré sa pýtam, ale už ako odpovede na dvojice pohárov. Teda napríklad, ak sa pýtam v otázke na poháre s číslom 1, 2 a 5, tak túto otázku reprezentujem ako deväticu 2, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0 (keďže ak by boli mince pod prvým a druhým pohárom, otázka dá odpoveď 2, ak medzi druhým a tretím, odpoveď bude 1, …). Devätíc z čísel 0, 1, 2 je veľa, avšak nie každá je vhodná. Na to, aby reprezentovala otázku, musí nutne spĺňať obmedzenia:

1. v devätici sa nemôže vyskytovať reťazec 0, 1, 0. Totižto ak dvojica, na ktorú dostaneme odpoveď 1 je tvorená pohármi s číslami $(n, n+1)$, tak to značí, že sa v otázke pýtame na práve jeden z nich. Potom ale nutne odpoveď na aspoň jednu z dvojíc $(n-1, n)$, $(n+1, n+2)$ je aspoň 1.

2. nemôže sa vyskytovať reťazec 0, 2 ani 2, 0. Opäť, ak dvojica, na ktorú dostaneme odpoveď 2 je tvorená pohármi s číslami $(n, n+1)$, tak susedná dvojica má odpoveď aspoň 1.

3. vzhľadom na to, že dvomi otázkami potrebujeme priradiť prvkom množiny $\{(1,2)$, $(2,3)$, $(3,4)$, $(4,5)$, $(5,6)$, $(6,7)$, $(7,8)$, $(8,9)\}$ jednoznačne prvky množiny $\{(0,0)$, $(0,1)$, $(0,2)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(1,2)$, $(2,0)$, $(2,1)$, $(2,2)\}$, nutne musí platiť, že počet núl, jednotiek a dvojok je v devätici rovný trom.

Týmito podmienkami sa nám značne obmedzia možné deväťice, prípustné sú napríklad tieto:
$(2,2,2,1,1,1,0,0,0)$; $(2,1,0,0,1,2,2,1,0)$; $(2,2,1,0,1,2,1,0,0)$; $(2,1,0,0,0,1,2,2,1)$; $(2,2,1,1,0,0,0,1,2)$; $(2,1,0,1,2,2,1,0,0)$; $(2,1,2,1,2,1,0,0,0)$ a mnohé ďalšie.
Z nich potrebujeme vybrať dve deväťice také, ktoré skutočne môžu reprezentovať otázky. Navyše dvojica otázok má byť zvolená tak, aby rôznym dvojiciam pohárov priradila rôzne dvojice odpovedí. Túto vlastnosť spĺňajú napríklad deväťice $(2,2,2,1,1,1,0,0,0)$ a $(2,1,0,0,1,2,2,1,0)$.
Potrebujeme ešte overiť, že naozaj z nich možno sformulovať otázky. To je ale splnené, keďže deväťici $(2,2,2,1,1,1,0,0,0)$ odpovedá otázka: „Koľko mincí sa nachádza pod pohármi s číslami $1,2,3,4,6$?“, a deväťici $(2,1,0,0,1,2,2,1,0)$ odpovedá druhá otázka: „Koľko mincí je pod pohármi $1,2,6,7,8$?“ Pomocou týchto otázok teda vieme podľa odpovede jednoznačne povedať, kde sa mince budú nachádzať.

Komentár: Samozrejme, vzorové riešenie nie je jediné, aj vám sa ich podarilo nájsť viacero. Niektorí ste sa na úlohu dívali viac hravo, iní menej, oceňujeme obrázky šálok a dychberúce tabuľky :-). Bodíky sa strhávali iba za neukázanie toho, že vaše otázky sú ozaj dobré, inak bolo všetko, ako má byť. Len tak ďalej!

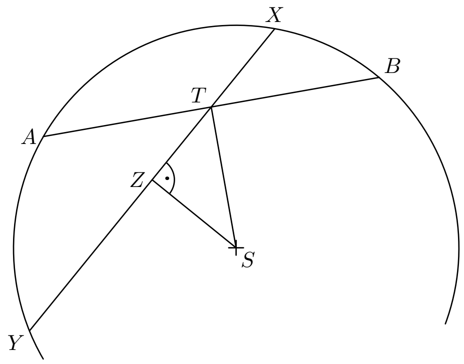
3. Daná je konečná množina $\mathcal{M}$ tetív kružnice k. Vieme, že každá tetiva z $\mathcal{M}$ prechádza stredom inej tetivy z $\mathcal{M}$. Dokážte, že všetky tetivy v $\mathcal{M}$ sú priemermi kružnice k.

Opravovali: Janka Baranová a Katka Čurná **Počet riešiteľov: 31**

Riešenie:

Na začiatok by bolo vhodné spomenúť všetko, čo vieme o tetivách. Tetiva je úsečka, ktorej koncové body ležia na kružnici. Poznáme špeciálnu tetivu, ktorá prechádza stredom kružnice a tou je priemer. Os každej tetivy prechádza stredom tejto kružnice (dokázať to iste zvládnete aj sami, keďže tetiva spolu so stredom kružnice vytvára rovnoramenný trojuholník – ramená sú polomery kružnice). To znamená, že vzdialenosť stredu kružnice od tetivy (najkratšia kolmá vzdialenosť) je rovnaká ako vzdialenosť stredu kružnice od stredu tetivy.

Pozrime sa teraz na tú našu množinu $\mathcal{M}$. Úlohu dokážeme sporom.
Predpokladajme teda, že niektoré z tetív (aspoň jedna) nie sú priemermi. Vezmime teraz takú tetivu z $\mathcal{M}$, ktorej vzdialenosť od stredu je najmenšia (ak ich je viac, vezmime ľubovoľnú z nich). Túto tetivu označme AB, jej stred T a stred kružnice S. Z definície množiny $\mathcal{M}$ vieme, že stredom T musí prechádzať iná tetiva – označme ju XY a jej stred Z. O tejto tetive ešte vieme, že jej vzdialenosť od S je aspoň taká veľká, ako vzdialenosť tetivy AB od S.



Pozrime sa teraz na obrázok – ST je kolmé na AB, SZ je kolmé na XY (už vieme prečo). Všimnime si trojuholník SZT – je pravouhlý s pravým uhlom pri vrchole Z, teda SZ (vzdialenosť S od tetivy XY) je odvesna a ST (vzdialenosť S od AB) je prepona. Vieme, že prepona je dlhšia ako odvesna a teda, že vzdialenosť S od tetivy AB je väčšia ako vzdialenosť S od XY, čo je spor s predpokladom, že tetiva AB je najbližšie k stredu S. Predpoklad bol teda nesprávny, čiže naozaj všetky tetivy z množiny $\mathcal{M}$ sú priemery k.

4. Nájdite všetky prirodzené čísla n, pre ktoré je číslo $n^n - n$ deliteľné 24. (Nestačí však iba popísať tieto čísla, ale treba dokázať, že všetky nájdené čísla vyhovujú a žiadne iné nevyhovuje.)

Opravovali: Peťo Milošovič a Tomáš Lučivjanský **Počet riešiteľov: 24**

Riešenie:

Daný výraz si zapíšme trochu v inom tvare $n \cdot (n^{n-1} - 1)$, ktorý je pre nás výhodnejší. Kedy je nejaké prirodzené číslo deliteľné číslom 24? Vtedy, ak je deliteľné tromi a ôsmimi súčasne. Rozoberme dva možné prípady: n je nepárne, resp. n je párne prirodzené číslo.

Ak n je nepárne, potom sa dá zapísať v tvare $n = 2k - 1$, $k \in \mathbb{N}$. Akákoľvek prirodzená mocnina nepárneho čísla bude stále nepárnym číslom, preto n^n je v tomto prípade určite nepárne číslo. Aplikovaním známeho vzorca $a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$, môžeme výraz $n^n - n$ upraviť:

$$n^n - n = n \cdot (n^{n-1} - 1) = n \cdot (n^{2k-2} - 1) = n \cdot (n^{k-1} - 1) \cdot (n^{k-1} + 1)$$

Ak n je väčšie ako 1, tak ľahko môžeme vidieť, že v zátvorkách máme dve po sebe idúce párne čísla. Jedno z týchto párnych čísel bude určite deliteľné štyrmi, a preto ich súčin bude deliteľný ôsmimi. Ak $n = 1$, dostávame $n^n - n = 1 - 1 = 0$ a 0 je deliteľná 24, čiže $n = 1$ je riešením.

Pozrime sa teraz na deliteľnosť tromi. Podľa toho, aký zvyšok dáva n po delení tromi, ho vieme zapísať v tvare $n = 6l + 1$, $n = 6l + 3$ alebo $n = 6l + 5$, pričom $l \in \mathbb{N}_0$.
Pokiaľ $n = 6l + 3 = 3 \cdot (2l + 1)$ ($l \in \mathbb{N}_0$) tak n je deliteľná tromi, čiže tromi je deliteľný aj výraz $n \cdot (n^{n-1} - 1) = n^n - n$. Pre nepárne čísla n deliteľné tromi teda platí, že $n^n - n$ je deliteľné 24.
Čo ak n nie je deliteľné tromi? Rozoberme podrobne prípad $n = 6l + 1$ ($l \in \mathbb{N}_0$). V tomto prípade

vieme výraz zo zadania upraviť:

$$n^n - n = (6l+1)^{6l+1} - (6l+1) = (6l+1) \cdot [(6l+1)^{6l} - 1]$$

Posledný člen vieme upraviť podľa binomickej vety:

$$(6l+1)^{6l} - 1 = (6l)^{6l} + \binom{6l}{1} \cdot (6l)^{6l-1} + \binom{6l}{2}(6l)^{6l-2} + \cdots + \binom{6l}{6l-1} \cdot (6l) + 1 - 1$$

Vidíme, že sme dostali výraz, v ktorom každý člen je deliteľný tromi, čiže aj $n^n - n$ je v tomto prípade deliteľný tromi.
Analogickým postupom pre prípad $n = 6l+5$ ($l \in \mathbb{N}_0$), ktorý vieme zapísať aj ako $n = 6l' - 1$ ($l' \in \mathbb{N}$) dostávame výraz

$$n^n - n = (6l' - 1) \cdot [(6l' - 1)^{6l'-2} - 1].$$

Tento výraz vieme roznásobiť podľa binomickej vety a keďže $(-1)^{6l-2} = 1$, jednotky sa nám opäť „pokrátia“ a výsledný výraz bude deliteľný tromi.
Pre akékoľvek nepárne číslo n sme teda ukázali, že výraz $n^n - n$ je deliteľný číslom 24.

Pokiaľ n je párne číslo, tak $n^{n-1} - 1$ je vždy nepárne číslo. Keďže 24 má deliť $n^n - n = n \cdot (n^{n-1} - 1)$, tak n musí byť deliteľné 8. Opäť teraz rozoberme tri možnosti podľa zvyšku n po delení tromi.
Ak n je deliteľné tromi (dokopy je deliteľné 24), tak je zrejmé, že aj $n^n - n$ je deliteľné 24.
Ak $n = 6l + 2$ ($l \in \mathbb{N}_0$), tak

$$n^n - n = (6l+2)^{6l+2} - (6l+2) = (6l+2) \cdot [(6l+2)^{6l+1} - 1].$$

Pokiaľ znovu použijeme binomickú vetu a fakt, že 2^{6l+1} dáva zvyšok 2 po delení tromi (premyslite si prečo), tak vidíme, že tento výraz nie je deliteľný tromi.
Ak $n = 6l + 4$ ($l \in \mathbb{N}_0$), tak dostávame

$$n^n - n = (6l+4)^{6l+6} - (6l+4) = (6l+4)[(6l+4)^{6l+3} - 1].$$

V tomto prípade zase vieme zistiť, že číslo 4 umocnené na nepárnu mocninu dáva vždy zvyšok 1 po delení tromi (premyslite si prečo). Výraz $(6l+4)^{6l+3} - 1$ je teda deliteľný tromi pre ľubovoľné prirodzené číslo l.

Zadaniu úlohy vyhovujú všetky nepárne prirodzené čísla n, všetky prirodzené čísla deliteľné 24 a prirodzené čísla deliteľné 8, ktoré dávajú po delení tromi zvyšok 1 (takéto čísla sa dajú napísať v tvare $24k + 16$, $k \in \mathbb{N}_0$.

5. Jožko si z písmenkovej polievky vytiahol písmená A, B a C a položil ich na stôl do radu vedľa seba. Potom ich začal vymieňať takýmto spôsobom: Zobral dve a vymenil ich medzi sebou. Napríklad po prvej výmene ich mohol mať takto: B A C. Ferko sa ho pýta: „Počuj, vedel by si spraviť presne 57 výmen tak, aby si mal opäť A B C v tomto poradí?“ A potom sa ho pýta Marek: „A keby si mal písmenká M A R E K?“ Poraďte Jožkovi, aby nestratil Ferkove ani Markove kamarátstvo.

Opravovali: Robo Tóth a Laco Bačo **Počet riešiteľov: 26**
Riešenie:

Takmer všetci z vás si veľmi správne uvedomili, že nejde o to, koľko má dané slovo písmen, ale riešiteľnosť úlohy závisí len od parity počtu výmen. Riešenie pre ABC je pomerne jednoduché, stačí si uvedomiť, že z pozícií ABC, CAB a BCA sa dá dostať iba do pozícií ACB, CBA a BAC a naopak. Na nepárnu výmenu sa dostaneme do druhej trojice a na párnu zase späť. Z toho jasne vyplýva, že na 57 výmen sa do pôvodnej trojice, a teda ani do stavu ABC, nedá dostať.

Druhá časť úlohy pre písmená MAREK sa samozrejme dá vyriešiť podobným spôsobom, ale stavov tu máme o poznanie viac – 120. Vypisovať ich do riešenia sa nikomu z vás nechcelo a určite chápete, že sa úloha dá vyriešiť jednoduchšie. Poďme sa teda pozrieť na to, ako.
Toto riešenie je v podstate spojením dvoch myšlienok, ktoré sa vyskytli vo vašich riešeniach. Označme takéto premenné: MA, MR, ME, MK, AR, AE, AK, RE, RK, EK. Ak sú v slove písmená, podľa ktorých sme premenné nazvali, v správnom poradí (v tom pôvodnom), ich hodnota bude nula, ak sú v zlom, tak ich hodnota bude jedna. Ďalej inverziou slova budeme nazývať súčet týchto premenných.
Myšlienka Maťa Vodičku: Napríklad inverzia slova AMKRE bude: $MA + MR + ME + MK + AR + AE + AK + RE + RK + EK = 1 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 1 + 1 = 3$. Na začiatku je inverzia slova 0, na konci tiež – máme dobrý invariant (niečo, čo sa nezmení), s ktorým sa dá pracovať.
Po troche skúmania si uvedomíme, že po prvej výmene je inverzia nepárne číslo, po druhej párne, po tretej je to zase číslo nepárne atď. Toto stačí už len dokázať, pretože na konci musí byť inverzia párna – nula. Potom budeme vedieť jednoznačne povedať, že na to treba párny počet operácií.

Pozrime sa teraz na našu prvú výmenu. Máme slovo MAREK, vyberieme ľubovoľné dve písmená z neho a vymeníme ich medzi sebou. Teraz si treba uvedomiť, koľko z našich premenných sa zmení z nuly na jednotku.
Vymenené písmená nech sú X a Y. Potom sa zmenili všetky premenné, ktoré hovorili o pozícii X a písmenách, ktoré boli pôvodne medzi X a Y, lebo X sa presunulo za ne. Takisto sa zmenili všetky premenné, ktoré hovorili o pozícii Y a písmenách, ktoré boli pôvodne medzi X a Y, lebo Y sa presunulo pred ne. Tu si treba uvedomiť, že takýchto premenných je spolu párny počet, pretože ide dvakrát o tie isté písmená, čo boli pôvodne medzi X a Y. Taktiež sa zmení ešte premenná XY, keďže sme vymenili tieto dve písmená. Dokopy sa teda zmenil nepárny počet premenných – nepárny počet núl na jednotku (keďže na začiatku sú tam len samé nuly) a inverzia bude po prvej výmene vždy nepárna.
Uvedieme príklad: vymeníme písmená A a K. Zmenia sa premenné AR, AE, RK, EK a ešte AK. Inverzia sa zmení na 5. Čo sa ale stane pri ďalšej výmene?
Rovnakou úvahou vieme dospieť k tomu, že sa opäť zmení nepárny počet premenných. Niektoré nuly na jednotky a niektoré jednotky na nuly. Avšak čo to znamená pre našu inverziu? Nepárne veľa premenných sa zmenilo. Dajme tomu, že z toho párne veľa jednotiek a nepárne veľa núl. To ale znamená, že z pôvodnej inverzie ubudlo párne číslo a pribudlo k nemu nepárne – inverzia je teraz párna. Ak sme zmenili nepárne veľa jednotiek a párne veľa núl, tak z inverzie ubudlo nepárne číslo a pribudlo k nemu párne – inverzia je teraz párna. Z toho jasne vidno, že po druhej výmene, nech je akákoľvek, bude inverzia párna. A opäť, rovnakou úvahou dostaneme, že po tretej výmene bude inverzia nepárna atď., čo sme chceli dokázať (myšlienka Katky Krajčiovej).

Určite chápete, že toto riešenie vôbec nevyužíva, že písmen je 5 a teda rovnaká úvaha (len pre viac premenných) sa bude dať použiť pre ľubovoľný počet písmen.

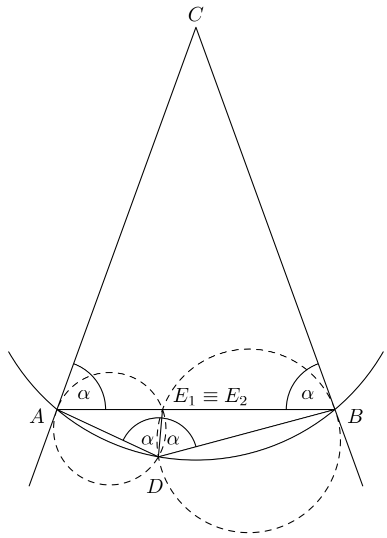
Iné riešenie časti a):
Predstavte si rovnostranný trojuholník ABC vystrihnutý z papiera. Jednu jeho stranu namaľujeme načerveno, druhú namodro. Čo sa deje, ak chceme „vymeniť“ nejaké jeho vrcholy? Správne, tieto dva vrcholy chytíme, a trojuholník otočíme, čo spôsobí, že odteraz už vidíme inú farbu. To sa bude diať zakaždým, keď takúto výmenu spravíme. Ak teda pôvodný stav bola červená farba, dostaneme sa k nemu len po párnom počte výmen. Škoda preškoda, že to pre viac písmen takto krásne jednoducho nefunguje…

6. Ostrouhlý rovnoramenný trojuholník ABC so základňou AB je vpísaný do kružnice k. Vnútri kratšieho z oblúkov AB kružnice k leží bod D. Nech k_1, resp. k_2, je kružnica prechádzajúca bodom D a dotýkajúca sa priamky CA v bode A, resp. priamky CB v bode B.
a) Dokážte, že druhý priesečník kružníc k_1 a k_2 (rôzny od bodu D) leží na priamke AB.
b) Dokážte, že súčet polomerov kružníc k_1 a k_2 je rovný polomeru kružnice k práve vtedy, keď je trojuholník ABC rovnostranný.

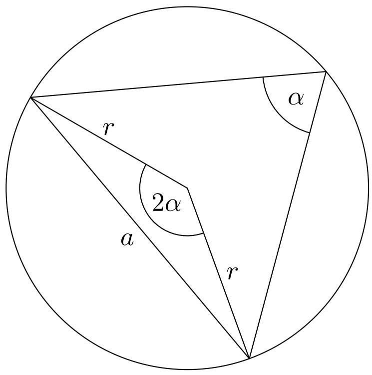
Opravovali: Edo Eiben **Počet riešiteľov: 15**

Riešenie:

Na úvod by som povedal, že od vás prišli rôzne správne riešenia, a preto si myslím, že by bola škoda, keby som vám neukázal aspoň niektoré z nich. Začnem jedným, o ktorom si myslím, že nevyžaduje veľa znalostí rôznych viet a vlastností a zároveň je vcelku krátke.



a) Označme priesečníky kružníc k_1, k_2 s úsečkou AB, rôzne od bodov A, B, ako E_1 a E_2. Ďalej označme veľkosť vnútorného uhla pri vrchole A v trojuholníku ABC ako α. Keďže náš trojuholník je rovnoramenný, tak aj $|\sphericalangle ABC| = \alpha$ a uhol $|\sphericalangle ACB| = 180° - 2\alpha$. Zo zadania je AC dotyčnica ku kružnici k_1 a teda z vlastností úsekového uhla [1] je aj uhol $|\sphericalangle ADE_1| = \alpha$. Podobne aj uhol $|\sphericalangle BDE_2| = \alpha$. Zároveň vieme, že štvoruholník $ADBC$ je tetivový, preto $|\sphericalangle ADB| = 2\alpha$ a taktiež je to súčet veľkostí uhlov ADE_1 a E_1DB. Z toho vyplýva, že aj $|\sphericalangle E_1DB| = \alpha$. Keďže body E_1 a E_2 ležia oba na AB a uhly BDE_1 a BDE_2 sú rovnaké, tak nutne aj body E_1 a E_2 sú totožné a teda kružnice sa pretínajú v bode $E \equiv E_1 \equiv E_2$ na úsečke AB.



b) Označme E druhý priesečník kružníc k_1 a k_2. Vieme, že veľkosť obvodového uhla nad tetivou AE v kružnici k_1 je α a taktiež aj uhly nad tetivami BE a AC v kružniciach k_2 a k sú veľkosti α. Skúsme preto vyjadriť polomer kružnice pomocou dĺžky tetivy, označme ju a, a veľkosti uhla nad danou tetivou – α.
Stredový uhol k uhlu α má veľkosť 2α. Zároveň máme trojuholník, ktorý je rovnoramenný, jeho ramená sú polomery kružnice – r, základňa je a a veľkosť uhla, ktorý zvierajú ramená, je 2α. Odtiaľ už ľahko dorátame, že [2]

$$r = \frac{a}{2 \cdot \sin \alpha}.$$

Teraz nám nič nebráni vyjadriť polomer kružnice k ako $r = \frac{|AC|}{2 \cdot \sin \alpha}$, kružnice k_1 ako $r_1 = \frac{|AE|}{2 \cdot \sin \alpha}$ a kružnice k_2 ako $r_2 = \frac{|EB|}{2 \cdot \sin \alpha}$. Teda $r = r_1 + r_2$, práve vtedy, keď

$$\frac{|AC|}{2 \cdot \sin \alpha} = \frac{|AE|}{2 \cdot \sin \alpha} + \frac{|EB|}{2 \cdot \sin \alpha},$$

čo nastáva iba ak $|AC| = |AE| + |EB|$, pričom vieme, že $|AE| + |EB| = |AB|$.
Takže $r = r_1 + r_2$ práve vtedy, keď $|AC| = |AB|$ a keďže trojuholník ABC je rovnoramenný so základňou AB, tak musí byť rovnostranný. To však bolo treba dokázať.

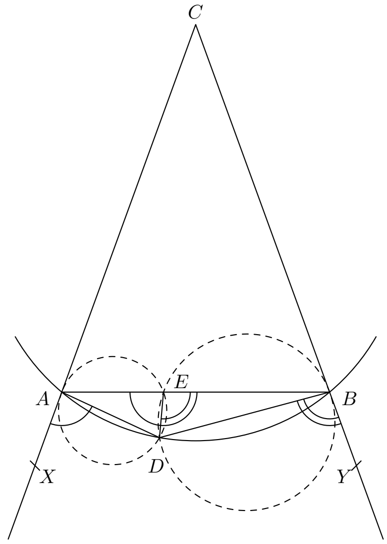
[1] Pre tých, čo nepoznajú vetu o úsekovom uhle, nech si to skúsia dokázať, nie je to veľmi zložité a stačí využiť iba fakt, že AC je dotyčnica v bode A ku kružnici k_1. Teda ak S_1 je stred k_1, tak AS_1 je kolmé na AC a to, že stredový uhol je dva krát obvodový

[2] Uhol α je vždy z intervalu $(0°, 180°)$, kde je sínus kladný, teda rôzny od nuly.

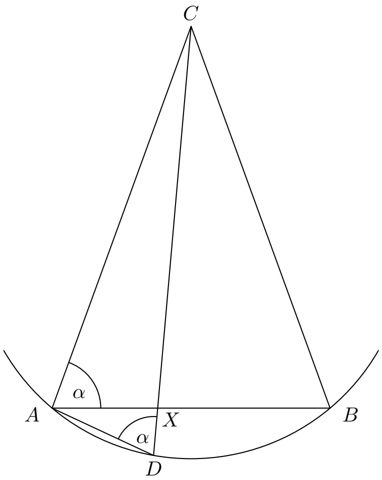
Iné riešenie:

Teraz ukážeme pár alternatívnych riešení časti a). Prvé z nich nevyužíva ešte žiadne náročné poznatky. Druhé už využíva mocnosť bodu ku kružnici a chordálu. Tretie, najkratšie z nich, dokonca kružnicovú inverziu.

1. Štvoruholník $ADBC$ je tetivový, preto súčet veľkostí protiľahlých uhlov CAD a CBD je $180°$. Označme X nejaký bod na polpriamke opačnej k AC a Y bod na polpriamke opačnej k BC. Uhol XAD je doplnok uhla CAD do $180°$ a uhol YBD uhla CBD. Preto aj súčet veľkostí uhlov XAD a YBD je $180°$. Ak označíme druhý priesečník kružníc k_1 a k_2 ako E, tak uhol AED je úsekový k uhlu XAD v kružnici k_1 a uhol BED je úsekový k uhlu YBD. Súčet uhlov AED a DEB je teda tiež $180°$, čiže E leží na úsečke AB.



2. Nech E je druhý priesečník kružníc k_1 a k_2. Dĺžky CA a CB sú rovnaké a zároveň sú to dotyčnice ku kružniciam k_1 a k_2. Bod C má preto rovnakú mocnosť ku kružniciam k_1 a k_2, teda leží na chordále týchto kružníc. Tým pádom bod E leží na priamke CD. Označme X priesečník úsečiek AB a CD. Keďže $ADBC$ je tetivový štvoruholník, tak uhol CDA je rovnaký ako uhol CBA, ktorý je zo zadania rovnaký ako uhol CAB, čo je vlastne aj uhol CAX. Uhly ACX a ACD sú rovnaké, keďže je to vlastne ten istý uhol. Trojuholníky ACD a XCA majú preto rovnaké uhly a teda sú podobné. Platí teda



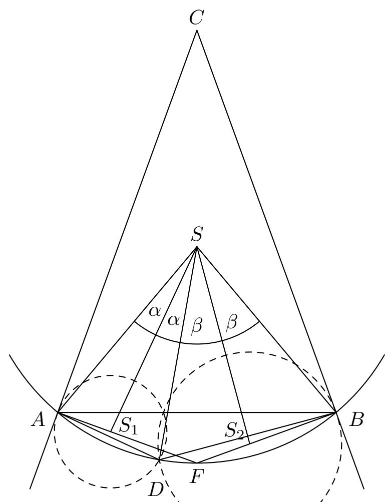
$$\frac{|CA|}{|CX|} = \frac{|CD|}{|CA|},$$

takže $|CX| \cdot |CD| = |CA|^2$, čo znamená, že bod X leží na kružnici k_1. Keďže priamka CD môže mať s k_1 najviac dva prieniky a X je rôzny od D, tak $X \equiv E$. Tým pádom druhý priesečník kružníc leží na priamke AB.

3. Označme E druhý priesečník kružníc k_1 a k_2. Kružnicová inverzia so stredom v bode C a polomerom CA ponechá body A a B, priamky CA a CB, aj kružnice k_1 a k_2 na mieste. Bod D sa preto len vymení s bodom E. Pritom obraz bodu D leží na obraze kružnice k, čo je priamka AB.

Teraz ešte jedno alternatívne riešenia časti b), ktoré nevyužíva časť a). Označme S_1, resp. S_2 stredy kružníc k_1, resp. k_2, a S stred kružnice k. Nech F je stred kratšieho z oblúkov AB kružnice k. Bod S_1, resp. S_2, leží vnútri úsečky AF, resp. BF. Ukážeme, že súčet veľkostí polomerov kružníc k_1 a k_2 je rovný dĺžke úsečky AF.

Stačí dokázať, že dĺžky úsečiek S_1F a S_2B sú rovnaké, čiže trojuholníky S_1SF a S_2SB sú zhodné. Tieto dva trojuholníky majú zhodné strany SF a SB. Ďalej majú zhodné uhly SFS_1 a SBS_2, čo vyplýva zo zhodnosti trojuholníkov AFS a FBS. Nakoniec, aj uhly S_1SF a S_2SB majú rovnakú veľkosť, čo ukážeme počítaním uhlov.



Priamka SS_1 je osou úsečky AD, označme α veľkosť zhodných uhlov ASS_1 a S_1SD. Priamka SS_2 je osou úsečky BD, označme β veľkosť zhodných uhlov DSS_2 a S_2SB. Uhly ASF a BSF sú zhodné, preto ich veľkosť je $\alpha + \beta$ – polovica veľkosti uhla ASB. Uhol S_1SF má teda veľkosť β.

Analogicky, ako sme dokázali, že $|S_1F| = |S_2B|$, vieme dokázať aj $|S_2F| = |S_1A|$, čo neskôr využijeme.

Súčet dĺžok kružníc k_1 a k_2 je rovnaký ako dĺžka kružnice k práve vtedy, keď súčet veľkostí polomerov k_1 a k_2 je rovný polomeru kružnice k. To nastane práve vtedy, keď $|AF| = \frac{|CF|}{2}$, a z pravouhlého trojuholníka CFA hneď vidíme, že to nastane vtedy a len vtedy, keď má uhol ACF veľkosť 30°, čiže keď je trojuholník ABC rovnostranný.

Poradie po 1. sérii Letného semestra 35. ročníka

P.	Meno a priezvisko	Trieda	Škola	1.	2.	3.	4.	5.	6.	B	CS
1.	Katarína Krajčiová	Kvarta	GAlejKE	6	9	9	9	5	9	9	51
2.	Martin Vodička	Sexta	GAlejKE	7	9	9	9	5	9	7	50
3.	Miroslav Stankovič	1. A	GPoštKE	-	7	8	9	7	9	9	49
4.	Matúš Hlaváčik	Sexta	GAlejKE	7	8	9	9	-	8	7	48
5.	Klára Ficková	3. A	GPoštKE	4	9	9	9	6	9	0	46
6.	Kristína Faguľová	3. A	GPoštKE	5	9	9	9	5	8	0	45
7.	Dorota Jarošová	Kvarta	GAlejKE	6	9	3	6	4	-	9	37
8.	Ľudmila Šimková	Kvinta	GPároNR	6	9	7	-	4	-	9	35
9.	Viktor Lukáček	3. C	GŠevčPO	6	9	9	1	9	-	0	34
	Miloslav Homer	3. A	GPoštKE	8	9	7	5	5	-	0	34
11.	Michal Kopf	3. A	GSlezCZ	6	9	6	8	-	4	0	33
	Ján Jursa	1. A	GPoštKE	7	9	4	-	4	-	9	33
13.	Pavol Koprda	Septima A	GHvieTT	5	9	9	5	4	-	0	32
14.	Linda Hanslíková	2. A	GSlezCZ	5	9	2	8	4	-	2	30
15.	Dominik Teiml	4. AK	GEColCZ	3	9	6	9	-	1	1	29
	Irena Bačinská	Kvinta	GKomeLY	5	9	1	1	4	-	9	29
17.	Lucia Magurová	2. A	GPoštKE	7	1	3	7	-	9	1	28
	Vladislav Vancák	Kvinta B	GAlejKE	4	9	4	1	1	1	9	28
	Daniel Till	3. A	GPoštKE	6	9	8	5	-	-	0	28
20.	Ladislav Hovan	4. A	ZKro4KE	-	9	9	-	-	9	0	27
21.	Anton Gromóczki	9. A	ZStanKE	-	9	4	0	4	-	9	26
22.	Martin Rapavý	Kvinta A	GAlejKE	7	9	-	-	-	-	9	25
23.	Patrícia Lakatošová	Kvarta	GsvEdKE	-	9	6	-	-	-	9	24
24.	Barbora Marečáková	Septima	GKukuPP	6	3	-	5	2	6	0	22
25.	Augustín Žídek	3. B	GFrydCZ	3	9	-	9	-	-	0	21
26.	Peter Hojnoš	1. E	GŠkolSN	1	9	-	-	-	-	9	19
27.	Vladimír Macko	2. A	GHronZV	4	4	7	-	2	-	0	17
	Jozef Lelič	3. A	GPoštKE	4	9	-	-	4	-	0	17
29.	Mária Orendáčová	1. A	GPoštKE	4	3	1	-	1	3	4	16
	Zuzana Baxová	3. E	G1májTN	2	9	4	1	-	-	0	16
31.	Marek Galajda	2. A	GZbroKE	7	-	4	-	-	4	0	15
32.	Ivana Gašková	Septima	GAlejKE	-	9	-	5	-	-	0	14
33.	Veronika Koľveková	3. A	GPoštKE	-	9	-	-	4	-	0	13
34.	Alexandra Pistráková	3. A	GPoštKE	4	-	3	-	3	-	0	10
35.	Roman Pivovarník	Kvinta A	GMudrPO	-	3	-	-	2	-	3	8
	Daniel Ondra	1. A	GPoštKE	1	3	1	-	-	-	3	8
37.	Lucia Floriánová	1. A	GPoštKE	-	-	-	-	3	-	3	6
38.	Ján Dudič	2. A	GPoštKE	2	-	1	-	0	1	0	4
39.	Marcel Česelka	2. C	GŠkulKE	-	2	-	0	1	-	0	3

P.	Meno a priezvisko	Trieda	Škola	1.	2.	3.	4.	5.	6.	B	CS
40.	Marcel Frančák	2. B	GMierNO	-	0	0	1	1	-	0	2
	Martina Oravcová	1. A	GPoštKE	1	-	0	-	-	-	1	2

Pohár konštruktérov Letného semestra 35. ročníka

P.	Skratka	Škola	P.r.	Body
1.	GPoštKE	Gymnázium Poštová 9 042 52 Košice	15	339
2.	GAlejKE	Gymnázium Alejová 1 041 49 Košice	7	253
3.	GSlezCZ	Slezské Gymnázium Zámecký okruh 29 746 01 Opava	2	63
4.	GPároNR	Gymnázium Párovská 1 950 50 Nitra	1	35
5.	GŠevčPO	Gymnázium sv. Moniky Tarasa Ševčenka 1 080 01 Prešov	1	34
6.	GHvieTT	Gymnázium Angely Merici Hviezdoslavova 10 917 01 Trnava	1	32
7.	GEColCZ	The English College in Prague Sokolovská 320 190 00 Praha 9	1	29
	GKomeLY	Gymnázium Komenského 13 082 71 Lipany	1	29
9.	ZKro4KE	Základná škola Krosnianska 4 040 22 Košice	1	27
10.	ZStanKE	Základná škola Staničná 13 040 01 Košice	1	26
11.	GsvEdKE	Gymnázium sv. Edity Steinovej Charkovská 1 040 22 Košice	1	24
12.	GKukuPP	Gymnázium Kukučínova 058 39 Poprad	1	22
13.	GFrydCZ	Gymnázium Náměstí T.G.M. 1260 73911 Frýdlant nad Ostravicí	1	21
14.	GŠkolSN	Gymnázium Školská 7 052 01 Spišská Nová Ves	1	19
15.	GHronZV	Gymnázium Hronská 1467/3 960 01 Zvolen	1	17
16.	G1májTN	Gymnázium 1. mája 2 911 01 Trenčín	1	16
17.	GZbroKE	Gymnáz. sv.T.Akvinského Zbrojničná 3 040 01 Košice	1	15
18.	GMudrPO	Gymnázium J. A. Raymana Mudroňova 20 080 01 Prešov	1	8
19.	GŠkulKE	Evanjelické gymnázium Škultétyho 10 040 01 Košice	1	3
20.	GMierNO	Gymnázium A. Bernoláka Mieru 307/23 029 01 Námestovo	1	2

Za podporu a spoluprácu ďakujeme

- Jednote slovenských matematikov a fyzikov, pobočka Košice
- Prírodovedeckej fakulte UPJŠ v Košiciach
- Agentúre na podporu výskumu a vývoja prostredníctvom projektu: LPP-0057-09 Rozvíjanie talentu prostredníctvom korešpondenčných seminárov a súťaží

Názov **STROM** – korešpondenčný matematický seminár
Číslo 5 • Apríl 2011 • Letný semester 35. ročníka (2010/2011)
Internet: `http://seminar.strom.sk`
E-mail: `strom@strom.sk`

Vydáva: Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice
Internet: `http://www.strom.sk`
E-mail: `zdruzenie@strom.sk`