



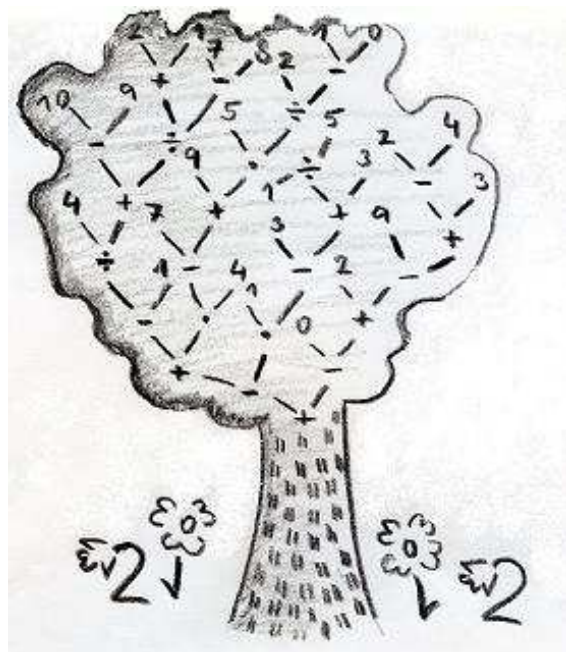
Čaute všetci!

Tento pozdrav je zámerný, má osloviť každého – stálych riešiteľov, ktorí si už čo-to prepočítali a už pomaly odchádzajú do **STROM**áckeho dôchodku, rovnako ako aj čerstvú mladú krv (práve som dopozerala Drakulu :-)). Transfúzne jednotky vraj majú krvi málo, no dúfame, že **STROM** si jej veľa udrží a pritiahne všetkých svojimi zaujímavými príkladmi.

Fiktívne presýpacie hodiny sa práve otočili, tak sa hopkyšupky pustite do rátania, použite hlavy, veď čo je prázdne, prázdny zostáva nemusí :-). A nezabudnite, maturanti (trimce še!) sú už z kola von, čo však neznamená úpadok zdravej súťaživosti.

Príjemnú zábavu!

Vaši **STROM**isti



Čo je seminár **STROM**?

Seminár **STROM** (Súťaž Talentovaných Riešiteľov Oblubujúcich Matematiku), organizovaný Združením **STROM**, je pokračovateľom najstaršej súťaže svojho druhu v bývalom Česko-Slovensku, ktorá vznikla pod názvom Korešpondenčný matematický seminár v roku 1976 v Košiciach. Tento seminár je **BEZPLATNÝ** a je určený najmä pre žiakov stredných škôl, no zapojiť sa môžu aj mladší. Každý školský rok čakajú na riešiteľov dva semestre, v ktorých dostanú zadania dvoch sérií príkladov.

Tí najlepší riešitelia sa potom dostanú na týždňové sústreďenie a zažijú veľa zábavy. Sústreďenia na konci semestrov majú byť pre žiakov odmenou a zároveň motiváciou na pokračovanie a zlepšovanie sa v riešení matematických seminárov.

Samotná korešpondenčná časť je v priebehu roka dopĺňovaná rôznymi akciami. Každoročne organizujeme **Matboj**, matematickú súťaž pre družstvá, ktorá sa tento rok uskutoční **30. 4.** v CVČ Domine v Košiciach. Taktiež organizujeme rôzne zábavné hry, výlety a športové stretnutia. Naším cieľom je ukázať žiakom krásu matematiky, niekedy aj netradičným a hravým spôsobom. Preto dúfame, že náš seminár a s ním spojené akcie si nájdú svojich stálych nadšencov v radoch žiakov, ale aj podporovateľov v radoch učiteľov.

2% z daní

Máme na Vás ešte jednu prosbu. Blíži sa obdobie, keď Vaši rodičia môžu venovať 2 % zo svojich daní verejnoprospešným organizáciám, ako sme my. Ako všetkým, aj nám sa financie zídu. Potrebujeme pokryť náklady na časopisy, poštu a chceli by sme cenu sústreďení udržať čo najnižšiu. Preto Vás chceme poprosiť, či by ste svojou troškou nepodporili našu dobrovoľnícku činnosť. Všetky potrebné informácie nájdete na našej stránke zdruzenie.strom.sk, kde stačí kliknúť na banner „2 % **STROM**u“.

Ďakujeme!

Pokyny pre riešiteľov

Seminár je určený pre žiakov prvého až štvrtého ročníka stredných škôl a príslušných tried osemročných gymnázií a bilingválnych gymnázií. Zapojiť sa môžu aj žiaci z nižších ročníkov; v súťaži majú rovnaké podmienky a výhody ako prváci. **STROM** je súťaž jednotlivcov.

Úlohy riešte zásadne samostatne, neodpisujte, v riešeníach vysvetľujte celý svoj myšlienkový postup ako v Matematickej olympiáde. Svoje riešenia môžete posilať poštou alebo e-mailom, nie osobne. Pri opravovaní sa držíme zásady, že čo sa nedá prečítať, nemôže byť ohodnotené bodmi. Preto zvážte, či nenapíšete svoje riešenie na počítači. Riešenia poštou zasielajte do uvedeného termínu (rozhoduje dátum poštovej pečiatky) na adresu

PF UPJŠ
STROM
Jesenná 5
041 54 Košice.

V prípade zasielania riešení e-mailom ich posielajte na e-mailovú adresu riesenia@strom.sk. Preferujeme súbory vo formáte PDF. Každú úlohu posielajte osobitne a do predmetu e-mailu napíšte (bez diakritiky) Uloha 1, respektíve Uloha 2, respektíve Uloha 3, respektíve Uloha 4. Vaše riešenia musia dôjsť pred polnocou v deň termínu série a len na uvedenú adresu. Ich prijatie bude potvrdené e-mailom. Technické problémy na našej či vašej strane nie sú dôvodom na akceptovanie riešení doručených po termíne. Akceptujeme prvé riešenie danej úlohy, ktoré pošlete.

S prvou sériou, ktorej riešenia nám posielate, pošlite vyplnenú **prihlášku** (prípadne ju môžete poslať e-mailom na adresu riesenia@strom.sk, pričom do predmetu uvediete Prihlaska). Riešenie každej úlohy píšete na samostatný papier **formátu A4**, respektíve do samostatného súboru, na výšku s **menom, školou, triedou a číslom úlohy**. Ak by vám nebolo jasné zadanie niektorej úlohy, obráťte sa na nás cez e-mail strom@strom.sk, prostredníctvom debaty na našej stránke alebo osobne.

Bodovanie úloh závisí od kvality riešenia. Za každú úlohu môže riešiteľ získať najviac 9 bodov. Body môžete získať aj za čiastočné vyriešenie zadaných úloh. Preto sa nebojte poslať aj svoje neúplné riešenia. Do poradia sa započítavajú všetky štyri úlohy + úloha podľa ročníka riešiteľa.

Prvákom sa do poradia navyše započítava najlepšie vyriešená úloha.

Druhák sa do poradia navyše započítava druhá najlepšie vyriešená úloha.

Tretiak sa do poradia navyše započítava tretia najlepšie vyriešená úloha.

Štvrták sa do poradia navyše započítava najhoršie vyriešená úloha.

Varovania (!!!). Body sa samozrejme bez výnimky strhávajú za odpisovanie a za poslanie riešení po termíne. Pri odpisovaní rozlišujeme podobné riešenia (počet bodov delíme počtom zúčastnených a zaokrúhlime nadol) a „takmer kópie“, ktoré ostávajú bez bodu. Ak (náhodou) nájdete úlohu riešenú v literatúre, uveďte názov, autora a stranu, inak riskujete stratu bodov za odpisovanie (je však potrebné napísať aj samotné riešenie). V prípade, že nie ste spokojní s bodovým ohodnotením vášho riešenia, môžete nám do dvoch týždňov od rozoslania riešenia zaslať poštou sťažnosť a tá bude prešetrená.

Hlasovanie úloh závisí od zaujímavosti a jedinečnosti vášho riešenia. Radosť vám môže spraviť 1 hlas (prehľadné, jasné riešenie), alebo 2 či 3 hlasy za výnimočné a originálne nápady. Ak nájdete riešenie v literatúre, kladné hlasy si nepočítate. Naopak, hrôzu budiace riešenia (výzorom, zložitou) získajú –1 hlas. Horšie obídu tí, ktorým opakovane za odpisovanie strhneme body. Po ich vydedení počtom odpisujúcich dostanú –3 hlasy, po veľkom odpisovaní je to –5 hlasov za každú odpísanú úlohu. Tak hor sa do hľadania pekných riešení, zabudnime na odpisovanie a hrajme sa s matematikou! Riešitelia s najvyšším počtom hlasov budú na konci semestra odmenení.

Sústredenie je odmenou pre najlepších, príležitosťou naučiť sa niečo nové a stretnúť sa s ostatnými riešiteľmi. Zúčastnia sa ho najlepší riešitelia podľa záverečného poradia a členovia minimálne prvých troch najlepších družstiev z matboja, ak sa v príslušnom polroku koná. Prípadní ďalší účastníci a náhradníci sú pozývaní podľa poradia **STROMu** a matboja; nie však tí riešitelia, ktorí už majú maturitu za sebou. Na sústredenie nebudú vôbec pozvaní riešitelia, ktorí získali v príslušnom semestri menej ako 10 bodov alebo menej ako –2 hlasy.

Matematický krúžok

Od septembra sa na Prírodovedeckej fakulte UPJŠ v Košiciach na Jesennej 5 v miestnosti P-10 každý týždeň vo štvrtok o 15:00 koná matematický krúžok, ktorý je zameraný na prípravu na Matematickú olympiádu v kategóriách A, B a C.

Krúžku sa môže zúčastniť ktorýkoľvek stredoškólak (ale i šikovný základuškolák), ktorý sa chce venovať Matematickej olympiáde.

Najbližšie plánované témy:

4. 3. a 11. 3.: **Postupnosti a rekurzia** (Feri Kardoš)

18. 3. a 25. 3.: **Magické štvorce** (Inga Semanišinová)

Podrobnejšie informácie môžete nájsť na stránke umv.science.upjs.sk/mo.

Zadania úloh letného semestra 34. ročníka

1 Prvá séria

Termín odoslania riešení: **15. 3. 2010**

- Gaba a Katka našli kopolu čokolád. Celková váha všetkých čokolád je S kg a najťažšia z nich má M kg. Dievčatá pri delení čokolády postupujú takto: rozdelia všetky čokolády do dvoch kôpok a potom lósom rozhodnú, ktorá kôpka ktorej z nich pripadne.
 - Dokážte, že menšia kôpka má pri hocijakom rozdelení hmotnosť nanajvýš $S - M$.
 - Ukážte, že dievčatá vedia čokolády rozdeliť na dve kôpky tak, že hmotnosť menšej kôpky bude aspoň $(S - M)/2$.
- Máme kocku $ABCDEFGH$ s hranou dĺžky 1 (zvyčajné označenie; vrcholy A a C sú koncovými vrcholmi stenovej uhlopriečky). Uvažujme cesty v tvare lomených čiar, ktorých úsekmi sú hrany našej kocky (cesta môže po jednej hrane prechádzať aj viackrát). Ktorých ciest dĺžky 2010 začínajúcich v bode A je viac: tých, čo končia v A , alebo tých, čo končia v C ? Svoju odpoveď podrobne zdôvodnite.
- Ciferník hodín pozostáva z pravidelného dvanásťuholníka $A_1A_2 \dots A_{12}$ vpísaného do kružnice s polomerom 1. Označme P priesečník priamok A_1A_6 a A_4A_8 a k kružnicu s tetivou A_1A_8 a polomerom 1 (rôznu od kružnice opísanej nášmu dvanásťuholníku). Dokážte, že
 - bod P leží na kružnici k ;
 - úsečky PA_5 a A_1A_2 majú rovnakú dĺžku;
 - stred kružnice k leží na úsečke A_8A_{12} .
- Nájdite všetky postupnosti a_1, a_2, \dots, a_{10} zložené z desiatich prirodzených čísel, ktoré majú obe nasledujúce vlastnosti:
 - pre každé $i \in \{1, 2, \dots, 10\}$ platí $1 \leq a_i \leq 100$;
 - ak $i, j \in \{1, 2, \dots, 10\}$, tak číslo $i + j$ delí $a_i + a_j$.

2 Druhá séria

Termín odoslania riešení: **19. 4. 2010**

- Marek navrhol Tomášovi, aby si vybral nejaké trojčiferné číslo \overline{abc} . Potom ho požiadal, aby mu povedal súčet čísel $\overline{acb}, \overline{bac}, \overline{bca}, \overline{cab}$ a \overline{cba} . Vie Marek vždy z tohoto súčtu zistiť, ktoré číslo si Tomáš vybral? Svoju odpoveď podrobne zdôvodnite.
(Symbolom \overline{xyz} označujeme pozičný zápis čísla v desiatkovej sústave, teda z označuje cifru na mieste jednotiek, y na mieste desiatok a x na mieste stoviek.)

2. Dvaja hráči, Mazo a Jakub, striedavo píšú na tabuľu usporiadané dvojice nezáporných celých čísel; začína Mazo. Ak chce niekto napísať na tabuľu dvojicu (a, b) , musí pre ľubovoľnú už napísanú dvojicu (c, d) platiť $a < c$ alebo $b < d$. Prehráva hráč, ktorý je donútený napísať na tabuľu dvojicu $(0, 0)$.
- a) Ukážte, že takáto hra vždy skončí po konečnom počte ťahov, bez ohľadu na to, ako Mazo s Jakubom hrajú.
- b) Nájdite a popíšte víťaznú stratégiu pre jedného z hráčov.
(*Víťazná stratégia* je postup, ktorý zabezpečí hráčovi výhru pri akejkoľvek hre protihráča. Samozrejme, pri popise tohto postupu treba brať ťahy protihráča do úvahy.)
3. Daný je rovnostranný trojuholník ABC . Na jeho stranách CA , AB , BC ležia v tomto poradí body M , N a P tak, že uhol CMP je pravý a platí

$$|\sphericalangle CBM| = \frac{1}{2}|\sphericalangle AMN| = \frac{1}{3}|\sphericalangle BNP|.$$

- a) Dokážte, že trojuholník NMB je rovnoramenný.
- b) Zistite veľkosť uhla CBM .
4. Zaoberajme sa reálnymi funkciami f a g , pre ktoré platí

$$f(g(x)) = g(f(x)) = -x \quad \text{pre každé reálne číslo } x. \quad (*)$$

- a) Nájdite aspoň tri rôzne dvojice vyhovujúcich funkcií f , g .
- b) Dokážte, že ak platí $(*)$ pre nejakú dvojicu funkcií f , g , tak obe tieto funkcie sú nepárne.
- c) Nech dvojica f , g spĺňa podmienku $(*)$. Dokážte, že ku každému reálnemu číslu b existuje práve jedno reálne číslo a , pre ktoré platí $f(a) = b$. (Funkcia f s touto vlastnosťou sa nazýva *bijektívna*.)
- d) Nájdite všetky polynómy f najvyššieho tretieho stupňa, ku ktorým existuje funkcia g tak, aby platil vzťah $(*)$.

Ak by vám nebolo jasné zadanie niektorej úlohy, obráťte sa na nás cez e-mail strom@strom.sk.

Za podporu a spoluprácu ďakujeme

- Jednote slovenských matematikov a fyzikov, pobočka Košice
- Prírodovedeckej fakulte UPJŠ v Košiciach
- Agentúre na podporu výskumu a vývoja prostredníctvom projektu:
LPP-0057-09 Rozvíjanie talentu prostredníctvom korešpondenčných seminárov a súťaží

Názov	STROM – korešpondenčný matematický seminár Číslo 3 • Február 2010 • Letný semester 34. ročníka (2009/2010)
Internet:	http://seminar.strom.sk
E-mail:	strom@strom.sk
Vydáva:	Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice
Internet:	http://www.strom.sk
E-mail:	zdruzenie@strom.sk