STROM
Korešpondenčný matematický seminár

Ahojte Stromáci,

Koniec školského roka je už za rohom a my máme za sebou poslednú sériu letného semestra. Dúfame, že ste si tento **STROM**ácky rok užili apoň tak ako my. Ak patríte medzi tých, čo sa dostanú na sústredenie, zostáva Vám už len poriadne sa naň tešiť. Ak sa Vám náhodou tento rok až tak nedarilo, nezostáva Vám nič iné, ako sa na ďalší rok snažiť o to viac.

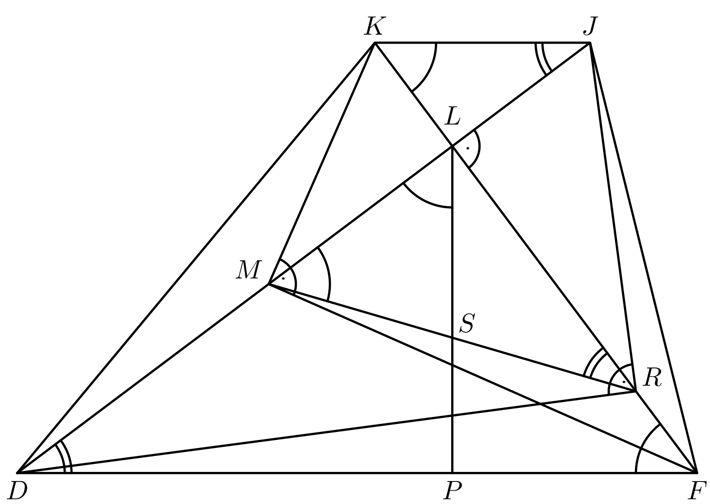
Vaši **STROM**isti

Riešenia 4. série úloh 33. ročníka

1. Vedúci STROMu si boli zase zahrať frisbee. Proti nim hral tím konkurenčného seminára, preto nechceli nič nechať na náhodu a hľadali najlepšie postavenie. Najprv sa postavili na jednu čiaru Dávid a Feri. Rovnobežne s nimi, ale o niečo ďalej sa postavili Jakub s Katkou tak, že tvorili štvoruholník $DFJK$. Pričom sa im podarilo postaviť tak, že priamka DJ je kolmá na priamku FK. Na priesečník priamok DJ a FK sa postavil Lučko (L). Marek a Robo sa postavili na polpriamky LD a LF tak, že platí $|\sphericalangle DRJ| = |\sphericalangle FMK| = 90°$. O súperovi sme sa na poslednú chvíľu dozvedeli, že obrana je pre neho neprekonateľná, ak spĺňa nasledujúce podmienky:
a) Trojuholník LMR je podobný s trojuholníkom LFD;
b) Štvoruholník $JKMR$ je tetivový;
c) Spojnica stredu úsečky MR a bodu L je kolmá na priamku DF.
Overte a dokážte, že naše rozostavenie tvorí obranu neprekonateľnú pre tím konkurenčného seminára.

Opravovali: Veronika Kopčová a Feri Kardoš **Počet riešiteľov: 17**
Riešenie:

Aby sme si urobili jasno v zadaní, nakreslime si najskôr obrázok. Zo zadania vieme, že priamka KJ je rovnobežná s priamkou DF, takže štvoruholník $DFJK$ je lichobežník. Z toho dostávame, že $|\sphericalangle DFK| = |\sphericalangle FKJ|$ a $|\sphericalangle FDJ| = |\sphericalangle DJK|$, pretože sú to striedavé uhly. Ľahko sa dá nahliadnuť, že trojuholník DLF je podobný s trojuholníkom JLK podľa vety *uu*. Označme veľkosti uhlov LKJ a LJK ako α (na obrázku jeden oblúčik) a β (dva oblúčiky). Podľa zadania priamky DJ a FK sú na seba kolmé, takže spomínané dva trojuholníky sú pravouhlé; naviac platí $\alpha + \beta = 90°$.



Po úvodných pozorovaniach zadania sa skúsme pustiť do riešenia samotnej úlohy.

a) Úloha sa dala riešiť viacerými spôsobmi, ukážeme si jeden z nich. Máme dokázať, že trojuholník LMR je podobný s trojuholníkom LFD. Skúsme použiť vetu *sus*. Vieme, že oba tieto trojuholníky sú pravouhlé, takže majú spoločnú veľkosť jedného uhla. Potrebujeme ešte overiť, že zodpovedajúce si strany, ktoré zvierajú pravý uhol, majú dĺžky v rovnakom pomere. Chceme dokázať, že platí

$$\frac{|LM|}{|LR|} = \frac{|LF|}{|LD|}. \tag{1}$$

Vieme, že trojuholník DLF je podobný s trojuholníkom JLK a teda pomer prislúchajúcich strán je rovnaký. Z toho dostávame vzťah

$$\frac{|LF|}{|LD|} = \frac{|LK|}{|LJ|}. \tag{2}$$

Na vyjadrenie dĺžok strán LM a LR v trojuholníku LMR použijeme Euklidovu vetu o výške. V pravouhlom trojuholníku KMF veľkosť výšky LM na preponu KF platí

$$|LM|^2 = |LF| \cdot |LK|; \tag{3}$$

analogicky v pravouhlom trojuholníku DRJ pre veľkosť výšky LR platí

$$|LR|^2 = |LD| \cdot |LJ|. \tag{4}$$

Potom využijúc vzťahy (4), (3) a (2) dostávame

$$\frac{|LM|}{|LR|} = \sqrt{\frac{|LM|^2}{|LR|^2}} = \sqrt{\frac{|LF| \cdot |LK|}{|LD| \cdot |LJ|}} = \sqrt{\frac{|LF|}{|LD|} \cdot \frac{|LK|}{|LJ|}} = \sqrt{\frac{|LF|}{|LD|} \cdot \frac{|LF|}{|LD|}} = \frac{|LF|}{|LD|},$$

čo bolo treba dokázať. Kto by to bol tušil, že taká jednoduchá vec ako Euklidova veta nám môže pomôcť vyriešiť takú ťažkú úlohu ako táto.

b) Ako dokázať o nejakých štyroch bodoch, že ležia na jednej kružnici? Stačí napríklad dokázať, že štvoruholník, ktorý vytvárajú, je tetivový. Ako však ukázať o nejakom štvoruholníku, že je tetivový? Jeho protiľahlé uhly musia dávať v súčte 180 stupňov. Iná možnosť je využiť vetu o obvodovom a stredovom uhle. V našom prípade stačí ukázať, že uhol, pod ktorým vidíme úsečku RJ z bodu M je rovnako veľký, ako uhol, pod ktorým vidíme tú istú úsečku z bodu K (a uvedomiť si, že body M a K ležia v tej istej polrovine určenej bodmi R a J). Inými slovami, stačí ukázať, že $|\sphericalangle RMJ| = |\sphericalangle RKJ|$, teda dva „obvodové uhly“ nad tou istou tetivou sú zhodné.
Z časti a) vieme, že trojuholníky DLF, JLK a RLM sú navzájom podobné. Potom majú pri zodpovedajúcich vrcholoch uhly rovnakej veľkosti, a teda $|\sphericalangle DFL| = |\sphericalangle JKL| = |\sphericalangle RML| = \alpha$, čo je ekvivalentné rovnosti, ktorú bolo treba dokázať. (Úplne rovnako sa dá overiť, že platí $|\sphericalangle MRK| = |\sphericalangle MJK|$.) Hmm, tu vlastne nebolo treba nič počítať, stačilo sa pozrieť na obrázok a využiť to, čo sme dokázali v predchádzajúcej časti.

c) Stred úsečky MR označme S a priesečník priamok LS a DF označme P. Ak chceme ukázať, že platí $LS \perp DF$, stačí vypočítať uhly v trojuholníku DPL a overiť, že uhol pri vrchole P je pravý. Trojuholník MLR je pravouhlý, vieme mu preto opísať Talesovu kružnicu so stredom v bode S a polomerom $|MS| = |RS| = |LS|$. Z toho dostávame, že trojuholník MSL je rovnoramenný, a teda

$$|\sphericalangle DLP| = |\sphericalangle SLM| = |\sphericalangle SML| = |\sphericalangle RML| = \alpha.$$

Na druhej strane

$$|\sphericalangle LDP| = |\sphericalangle LDF| = \beta.$$

Potom pre veľkosť uhla pri vrchole P v trojuholníku DPL platí

$$|\sphericalangle DPL| = 180^\circ - (|\sphericalangle DLP| + |\sphericalangle LDP|) = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ,$$

z čoho je jasné, že spojnica stredu úsečky MR a bodu L je kolmá na priamku DF, čo bolo treba dokázať. Kto by to bol povedal, že Talesova kružnica vie byť užitočná aj inde ako v konštrukčných úlohách.

2. Tomáš s Kubom uzatvárali stávky, kto čo všetko možné dokáže. Kubo dá Tomášovi 70 prirodzených čísel menších ako 200. Ak Tomáš dokáže z nich vybrať dve čísla a a b tak, že ich rozdiel bude jedno z čísel 4, 5 alebo 9, tak Kubo mu dá do čaju cukor. V opačnom prípade mu dá do čaju soľ. Dokážte, že Tomáš sa vždy vie vyhnúť tomu, že by mal vypiť slaný čaj.

Opravovali: Gabriela Vozáriková a Marek Derňár **Počet riešiteľov: 27**

Riešenie:

To, že sa Tomáš stále dokáže vyhnúť trestu znamená, že pri ľubovoľnom výbere 70 čísel menších ako 200 existuje medzi nimi dvojica čísel a a b taká, že ich rozdiel je 4, 5 alebo 9. Pokúsme sa to dokázať sporom. Predpokladajme teda, že vieme vybrať 70 čísel menších ako 200 takých, že medzi nimi neexistuje dvojica a a b zo zadania.

Začnime jednoduchšou úlohou. Zistime, koľko najviac čísel menších ako 14 možno vybrať tak, aby medzi nimi neexistovala dvojica čísel a a b spĺňajúca vlastnosť zo zadania. Rozdeľme si čísla menšie ako 14 do niekoľkých skupín, a to takých, aby rozdiel ľubovoľných dvoch čísel v jednej skupine bol 4, 5 alebo 9 (teda ľubovoľné dve čísla v rámci skupiny spĺňajú podmienku pre a a b). Skupiny môžu vyzerať napríklad takto:

$$S_1 = \{1, 5, 10\}$$
$$S_2 = \{2, 6, 11\}$$
$$S_3 = \{3, 7, 12\}$$
$$S_4 = \{4, 8, 13\}$$

V týchto množinách mám zahrnuté všetky čísla menšie ako 14, okrem čísla 9. Rozoberieme si teda dve možnosti:

1. Číslo 9 nevyberiem. Potom mi množiny S_1 až S_4 zahŕňajú všetky čísla, z ktorých môžeme vyberať. Koľko najviac čísel môžeme vybrať, aby medzi nimi neexistovala dvojica s rozdielom 4, 5 alebo 9? Najviac štyri, lebo pri výbere päť a viac čísel vieme s istotou povedať, že aspoň dve (označíme ich a a b) budú z tej istej množiny. Z toho, ako sme množiny definovali potom ale vyplýva, že rozdiel týchto čísel a a b je 4, 5 alebo 9, teda takýto výber je už nevhodný.

2. Číslo 9 vyberiem. Potom ale viem, že nemôžem vybrať ani čísla 4, 5 a 13. Zvyšné čísla, ktoré ostanú na výber si môžem rozdeliť do množín:

$$S_1 = \{1, 6, 10\}$$
$$S_2 = \{2, 7, 11\}$$
$$S_3 = \{3, 8, 12\}$$

Z tohto rozdelenia je zrejmé, že teraz môžem vybrať maximálne tri ďalšie čísla. Teda spolu s 9 môžem aj v tomto prípade vybrať najviac štyri čísla tak, aby tento výber spĺňal podmienky.

Teraz sme k riešeniu už len krôčik. To, čo sme urobili s číslami od 1 do 13 (rozdelenie do vhodných množín) by sme mohli analogicky zopakovať pre ľubovoľnú 13-ticu po sebe idúcich čísel. Rozdeľme čísla od 1 do 199 na časti od 1 do 13, od 14 do 26, od 27 do 39,... od 183 do 195, od 196 do 208 (presnejšie od 196 do 199). Z každej 13-tice môžem zobrať maximálne štyri čísla. Počet 13-tic je

$208/13 = 16$, teda spolu spomedzi čísel od 1 do 207 môžem vybrať maximálne $16 \cdot 4 = 64$ čísel spĺňajúcich podmienku. To je ale spor s naším predpokladom, že ich je možné vybrať 70. Negácia neplatí, teda platí pôvodné tvrdenie: Pri ľubovoľnom výbere 70 čísel (my sme dokázali silnejšie tvrdenie pre ľubovoľný výber 65 čísel) menších ako 200 (my sme dokázali, že dokonca menších ako 209) vždy existuje medzi vybratými číslami dvojica čísel s rozdielom 4, 5 alebo 9. Tomáš teda pre tentokrát piť slaný čaj nemusí :).

Iné riešenie (inšpirované riešením Martina Bachratého):
Opäť využijeme dôkaz sporom. Predpokladajme teda, že existuje výber 70 čísel menších ako 200 taký, že Tomáš musí piť slaný čaj. Usporiadajme si čísla tohto výberu od najmenšieho po najväčší. Spočítajme koľko je čísel, ktoré tieto vybraté čísla vylučujú a sú od nich väčšie (čiže čísla tvaru $x+4$, $x+5$ alebo $x+9$, ak x je vybraté).
To znamená, že v našej usporiadanej postupnosti vybratých čísel budeme postupne odoberať čísla x, započítame ich a spolu s nimi aj tie čísla z množiny $\{x+4, x+5, x+9\}$, ktoré sme ešte nezapočítali v predchádzajúcich krokoch. Dokážeme, že s každým číslom x započítame aspoň dve čísla. Jedným z nich je isto $x+9$. Toto číslo by teoreticky mohlo odstrániť číslo $x+4$ alebo $x+5$, no obe tieto čísla sú väčšie ako x. Teda ak by aj boli medzi vybratými, tak by na rad prišli až neskôr, teda $x+9$ sa započíta pri spracovávaní čísla x.
Ďalším číslom, ktoré sa započíta pri čísle x je $x+5$. Čísla, ktoré by ho mohli tiež odstrániť sú $x+1$ (no to je väčšie ako x) a číslo $x-4$. No ak by $x-4$ bolo tiež medzi vybratými, tak by tam číslo x byť nemohlo, lebo dávajú rozdiel 4. Teda jedným dôležitým výstupom z tejto úvahy je, že pri spracovaní každého čísla započítame aspoň 2 ďalšie (odstránené) čísla.
Teda po spracovaní všetkých 70 čísel dostaneme aspoň $70 \cdot 3 = 210$ čísel. Vyberané čísla však boli menšie ako 200, najväčšie odstránené číslo teda mohlo byť $199+9 = 208$. To znamená, že spočítaním všetkých vybratých čísel spolu s ich odstránenými číslami (bez opakovania čísel) sme mohla dostať tiež maximálne 208 čísel, $210 > 208$ dostávame teda spor a platí pôvodné tvrdenie. Tomáš sa stále dokáže vyhnúť pitiu slaného čaju.

Komentár: Väčšina z vás šla na úlohu dobre, všimli ste si „cyklus“ dĺžky 13, odpozorovali že je v ňom maximálny počet vybratých čísel 4. Avšak väčšina pri tomto pozorovaní aj ostala, resp. snažila sa hľadať optimálny spôsob výberu čísel spomedzi tej 13-tice, avšak bez dôkazu. Za to museli ísť bodíky dole.

3. Katka má rada prvočísla. Stále sa s nimi hrá a experimentuje. Naposledy jej Dávid zadal, aby našla všetky také prirodzené čísla n a p, že čísla p, $p+2$, 2^n+p a 2^n+p+2 budú prvočísla. Katke sa to nedarilo, a tak vypísala súťaž, že každému kto nájde všetky dá pusu. Chcete byť medzi nimi aj vy? Tak nájdite všetky také n a p.

Opravovali: Miška Vrbjarová a Feri Kardoš **Počet riešiteľov: 25**
Riešenie:
V prvej časti riešenia využijeme fakt, že okrem čísel 2 a 3 je možné každé prvočíslo zapísať v tvare $6k+1$ alebo $6k+5$.
Prečo je to tak? Vieme, že každé prirodzené číslo dáva po delení šiestimi zvyšok 0, 1, 2, 3, 4 alebo 5, a teda sa dá zapísať v jednom z tvarov $6k$, $6k+1$, $6k+2$, $6k+3$, $6k+4$ alebo $6k+5$, kde $k \in \mathbb{N}_0$. Čísla tvaru $6k$, $6k+2$, $6k+4$ sú deliteľné číslom 2, a preto nemôžu byť prvočíslami (až na jednu výnimku, a to číslo 2). Takisto čísla tvaru $6k+3$ sú deliteľné číslom 3, a preto nemôžu byť prvočíslami (až na číslo 3). Prvočíslami rôznymi od 2 a 3 preto môžu byť len čísla tvaru $6k+1$ a $6k+5$.
Keďže p má byť prvočíslo, máme tieto možnosti: buď je p tvaru $6k+1$, alebo je tvaru $6k+5$, alebo $p = 2$ alebo $p = 3$.
Ak $p = 6k+1$, tak $p+2 = 6k+3 = 3(2k+1)$. Toto číslo je určite deliteľné 3, no jediné prvočíslo deliteľné troma je 3. Teda $p+2 = 3$, ale potom $p = 1$, čo nie je prvočíslo. Táto možnosť nevedie

k riešeniu.
Ak $p = 6k + 5$, tak $p + 2 = 6k + 7 = 6k + 6 + 1 = 6(k + 1) + 1$, čiže toto číslo môže byť prvočíslom. Pozrime sa na čísla $p + 2^n$ a $p + 2^n + 2$. Ak označíme $q = p + 2^n$, tak $p + 2^n + 2 = q + 2$. Čísla q a $q + 2$ sú očividne väčšie ako p, nemôžu sa teda rovnať 2 ani 3. Ak majú q aj $q + 2$ byť prvočísla, tak musia byť jedného z tvarov $6k' + 1$ a $6k' + 5$.
Ak $q = 6k' + 1$, tak $q + 2 = 6k' + 3$, a teda nemôže byť prvočíslom. Preto číslo q je tvaru $6k' + 5$. Potom platí

$$6k' + 5 = q = p + 2^n = 6k + 5 + 2^n$$
$$6k' = 6k + 2^n$$
$$2^n = 6k' - 6k = 6(k' - k)$$

To však znamená, že číslo 2^n je deliteľné 6-mi, a teda je (okrem iného) deliteľné aj 3-mi. No v jeho rozklade na súčin prvočísel sa žiadna trojka nenachádza, tvoria ho samé dvojky. Teda ani pre čísla p tvaru $6k + 5$ nedostávame žiadne riešenie.
Ak $p = 2$, tak $p + 2 = 4$, čo nie je prvočíslo, takže ani táto možnosť nevyhovuje.
Ostáva nám teda jediná možnosť, a to $p = 3$. Ak $p = 3$, tak $p + 2 = 5$, čo by sedelo. Teraz ešte treba nájsť také n, pre ktoré čísla $3 + 2^n$ a $5 + 2^n$ sú prvočísla. Skúsme sa pozrieť na hodnoty výrazov $3 + 2^n$ a $5 + 2^n$ pre najmenšie možné hodnoty čísla n.

n	**1**	2	**3**	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$3 + 2^n$	**5**	7	**11**	19	35	67	131	259	515	1027	2051	4099
deliteľ	5	7			5,7			7	5		7	
$5 + 2^n$	**7**	9	**13**	21	37	69	133	261	517	1029	2053	4101
deliteľ	7	3		3,7		3	7	3		3,7		3

Pre $n = 1$, resp. $n = 3$ dostávame dvojicu prvočísel 5 a 7, resp. 11 a 13. Úloha má preto aspoň dve riešenia. Existujú však ak nejaké ďalšie? Vyzerá to tak, že pre ostatné čísla n vždy aspoň jedno z čísel $3 + 2^n$ a $5 + 2^n$ je zložené, je totiž deliteľné niektorým z prvočísel 3, 5 a 7. Ak sa pozrieme bližšie na to, akým prvočíslom je to-ktoré číslo deliteľné, môžeme si všimnúť hneď niekoľko zaujímavých vecí:
Ak n je párne, číslo $5 + 2^n$ vyzerá podľa tabuľky vždy byť deliteľné 3-mi. Je to naozaj tak? Skúsme toto pozorovanie dokázať indukciou: Pre $n = 2$ je číslo $5 + 2^n$ rovné 9, takže tromi deliteľné očividne je. Ak pre nejaké n je číslo $5 + 2^n$ deliteľné tromi, tak $5 + 2^n = 3m$ pre vhodné $m \in \mathbb{N}$. Potom pre nasledujúce párne číslo $n + 2$ platí

$$5+2^{n+2} = 5+4\cdot 2^n = 5+4\cdot(2^n+5-5) = 5+4\cdot(3m-5) = 5+12m-20 = 12m-15 = 3(4m-5),$$

takže aj číslo $5 + 2^{n+2}$ je deliteľné tromi, čo bolo treba dokázať. Iný dôkaz tvrdenia, že pre každé párne číslo n je číslo $5 + 2^n$ deliteľné 3-mi, je nasledovný: Nech $n = 2k$. Potom

$$5 + 2^n = 5 + 2^{2k} = 5 + 4^k = 5 + (3 + 1)^k.$$

Ak umocníme výraz $(3 + 1)^k$ podľa binomickej vety, všetky členy okrem posledného (rovného 1^k) budú deliteľné tromi; číslo $5 + (3 + 1)^k$ bude teda po delení tromi dávať rovnaký zvyšok ako číslo $5 + 1 = 6$, čiže 0. Skúmané číslo teda je deliteľné tromi.
Analogicky vieme dokázať ešte tri pozorovania (skúste si to sami!):

- Ak $n = 4k + 1$, tak číslo $3 + 2^n$ je deliteľné 5-mi.
- Ak $n = 3k + 1$, tak číslo $5 + 2^n$ je deliteľné 7-mi.
- Ak $n = 3k + 2$, tak číslo $3 + 2^n$ je deliteľné 7-mi.

Vylúčili sme takto všetky čísla $n > 3$, alebo má tento postup nejaké medzery? Pre ktoré hodnoty n nie je ani jedno z čísel $3 + 2^n$ a $5 + 2^n$ deliteľné ani 3-mi, ani 5-mi, ani 7-mi? Inými slovami, ktoré prirodzené čísla n sa nedajú napísať v tvare $2k$, $4k + 1$, $3k + 1$ ani $3k + 2$? Keďže deliteľnosť 5-mi sa opakuje s periódou 4 a deliteľnosť 3-mi sa opakuje s periódou 3, tak ich kombinácie sa budú opakovať s periódou 12. Rozoberme preto jednotlivé možnosti aký zvyšok môže dávať číslo n po delené 12-mi:

n	12ℓ	$12\ell+1$	$12\ell+2$	$12\ell+3$	$12\ell+4$	$12\ell+5$
je tvaru	$2k$	$4k+1$	$2k$	?	$2k$	$4k+1$
n	$12\ell+6$	$12\ell+7$	$12\ell+8$	$12\ell+9$	$12\ell+10$	$12\ell+11$
je tvaru	$2k$	$3k+1$	$2k$	$4k+1$	$2k$	$3k+2$

Vidíme, že jediný otvorený prípad sú čísla tvaru $12\ell + 3$. Pre $\ell = 0$ dostávame čísla $3 + 2^3 = 11$ a $5 + 2^3 = 13$, pre $\ell = 1$ dostávame čísla $3 + 2^{15} = 32771$ a $5 + 2^{15} = 32773$. Prvé z nich je prvočíslo, ale druhé vieme rozložiť na súčin: $32773 = 13 \cdot 2521$. Tá trinástka, to nemôže byť náhoda!
Skúsme preto dokázať, že ak $n = 12\ell+3$, tak číslo $5+2^n$ je deliteľné 13-mi. Pre $\ell = 0$ a $\ell = 1$ tvrdenie zrejme platí. Predpokladajme, že platí pre nejaké $\ell \geq 1$ a skúsme overiť, že platí aj pre $\ell + 1$: Nech $5 + 2^{12\ell+3} = 13m$. Potom

$$5 + 2^{12(\ell+1)+3} = 5 + 2^{12\ell+12+3} = 5 + 2^{12+(12\ell+3)} = 5 + 2^{12} \cdot 2^{12\ell+3} = 5 + 2^{12} \cdot (13m - 5) =$$
$$= 5 + 2^{12} \cdot 13m - 2^{12} \cdot 5 = 13 \cdot 2^{12} \cdot m + 5 - 20480 = 13 \cdot 2^{12} \cdot m - 20475 = 13 \cdot (4096m - 1575),$$

čo bolo treba dokázať. Číslo $5 + 2^n$ je pre $n = 12\ell + 3$ deliteľné 13-mi, a teda pre $n \geq 4$ je vždy aspoň jedno z čísel $3+2^n$ a $5+2^n$ zložené. Úloha má preto len dve riešenia: $p = 3$ a $n = 1$; $p = 3$ a $n = 3$.

Iné riešenie.
Rovnako ako v prvom riešení (pomocou deliteľnosti 3-mi, resp. 6-mi) dokážeme, že p musí byť rovné 3. Druhá časť riešenia sleduje tú istú líniu, na zápis jednotlivých myšlienok sa ale používajú kongruencie. Podľa Malej Fermatovej vety platí $2^2 \equiv 1 \pmod 3$. Preto

$$5 + 2^{2k} = 5 + (2^2)^k \equiv 2 + 1^k = 3 \equiv 1 \pmod 3,$$

takže pre $n = 2k$ je číslo $5+2^n$ deliteľné 3-mi, takže to je zložené číslo (až na číslo 3, čo však nemôže nastať). Podobne z Malej Fermatovej vety dostávame, že platí $2^4 \equiv 1 \pmod 5$. Potom

$$3 + 2^{4k+1} = 3 + 2 \cdot (2^4)^k \equiv 3 + 2 \cdot 1^k = 5 \equiv 0 \pmod 5,$$

takže pre $n = 4k + 1$ je číslo $3 + 2^n$ deliteľné 5-mi, takže je to zložené číslo (až na číslo 5 pre $n = 1$). Podobne $2^6 \equiv 1 \pmod 7$, a teda

$$5 + 2^{6k+1} = 5 + 2 \cdot (2^6)^k \equiv 5 + 2 \cdot 1^k = 7 \equiv 0 \pmod 7$$

a

$$3 + 2^{6k+5} = 3 + 2^5 \cdot (2^6)^k \equiv 3 + 32 \cdot 1^k = 35 \equiv 0 \pmod 7,$$

takže pre $n = 6k+1$ je číslo $5+2^n$ a pre $n = 6k+5$ je číslo $3+2^n$ deliteľné 7-mi, takže je to zložené číslo (až na číslo 7 pre $n = 1$). Napokon $2^{12} \equiv 1 \pmod{13}$, a teda

$$5 + 2^{12k+3} = 5 + 2^3 \cdot (2^{12})^k \equiv 5 + 8 \cdot 1^k = 13 \equiv 0 \pmod{13},$$

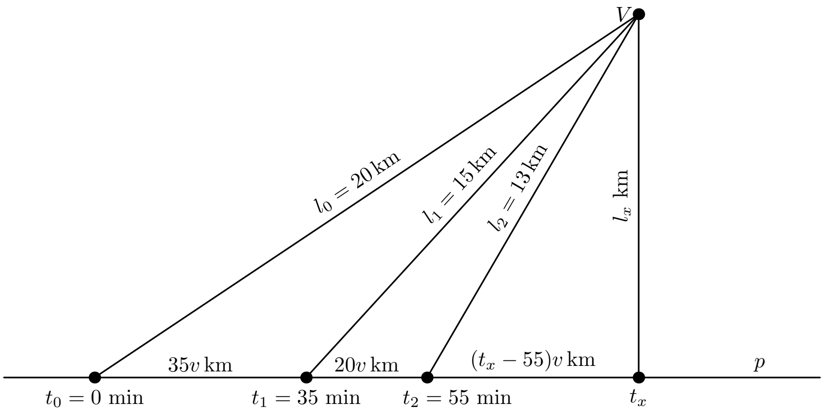
takže pre $n = 12k + 3$ je číslo $5 + 2^n$ deliteľné 13-mi, takže je to zložené číslo (až na číslo 13 pre $n = 3$).
Analýzou zvyškov po delení 12-mi dostávame, že obe čísla $3 + 2^n$ a $5 + 2^n$ môžu byť prvočíslami len pre $n = 1$ alebo $n = 3$.

4. Každé pekné dievča, ktoré v poslednom období Tomáš a Vlado stretli, ospevovalo filmy s pirátom Jackom Sparrowom a pritom si ich vôbec nevšímalo. Tak sa Tomáš s Vladom jedného dňa rozhodli, že sa z nich stanú piráti. Obidvaja si postavili lode a spravili si preteky na mori (ktoré považujeme za rovinu). Vietor bol celý deň stály, teda obidve lode sa stále pohybovali rovnakou rýchlosťou a obidve stále udržovali svoj smer. O 9:00 boli od seba lode vzdialené 20 km, o 9:35 15 km a o 9:55 to bolo 13 km. Pre ich budúcu pirátsku kariéru bolo najdôležitejšie zistiť, kedy je najlepší moment pre streľbu z kanónov. Viete pre nich zistiť, kedy boli ich lode k sebe najbližšie a koľko km boli vzdialené?

Opravovali: Jakub Sedlák a Marek Derňár **Počet riešiteľov: 15**

Riešenie:

Úloha sa dá riešiť mnohými spôsobmi. Záleží len na jej interpretácii. Nám sa najviac páči fyzikálna myšlienka o relativite pohybu. Ako vieme, pohyb nie je absolútny (nezávislý). Ak hovoríme o pohybe, musí byť jasné, čo sa pohybuje vzhľadom k čomu.



V tejto úlohe budeme uvažovať pohyb jednej lode vzhľadom k tej druhej. Uvažujme teda našu vlastnú vzťažnú sústavu, kde sa Tomášova loď pohybuje rýchlosťou v (km $\cdot$ min^{-1}) vzhľadom k Vladovej lodi po priamke p. Vladova loď sa v tejto sústave nepohybuje.

Označme si čas 9:00 ako t_0 a vzdialenosť lodí v tomto čase l_0, čas 9:35 ako t_1 a vzdialenosť l_1, čas 9:55 ako t_2 a vzdialenosť l_2 a čas, kedy sú lode k sebe najbližšie, ako t_x a príslušnú vzdialenosť lodí l_x.

Vyzerá to tak, že v danej situácii by sa dala pekne využiť Pytagorova veta. Na to však musia byť dĺžky všetkých strán daných trojuholníkov popísané rovnakými jednotkami. Keďže sa ale Tomášova loď pohybuje v našej sústave istou rýchlosťou v, vieme si vzdialenosť, ktorú Tomášova loď voči Vladovej prejde vyjadriť pomocou tejto rýchlosti. Vieme, že rýchlosť $v = \frac{s}{t}$ (dráha za čas), a preto si dané vzdialenosti môžeme vyjadriť ako príslušný čas krát rýchlosť $t \cdot v$.

Z pravouhlých trojuholníkov si podľa Pytagorovej vety zostavíme 3 rovnice.

$$\begin{aligned} [(t_x - t_2)\cdot v]^2 + l_x^2 &= l_2^2 & [(t_x - 55)\cdot v]^2 + l_x^2 &= 13^2 \\ [(t_x - t_1)\cdot v]^2 + l_x^2 &= l_1^2 \implies & [(t_x - 35)\cdot v]^2 + l_x^2 &= 15^2 \\ [(t_x - t_0)\cdot v]^2 + l_x^2 &= l_0^2 & (t_x \cdot v)^2 + l_x^2 &= 20^2. \end{aligned}$$

Zostáva už len vyriešiť sústavu týchto troch rovníc o troch neznámych. Napríklad takto: Odčítajme prvú rovnicu od druhej a potom druhú od tretej. Dostávame

$$\begin{aligned} v^2 \cdot [(t_x - 35)^2 - (t_x - 55)^2] &= 15^2 - 13^2 \\ v^2 \cdot [t_x^2 - (t_x - 35)^2] &= 20^2 - 15^2. \end{aligned}$$

Upravme a vynásobme prvú rovnicu 7 a druhú 4,

$$\begin{aligned} v^2 \cdot (40t_x - 1800) &= 56 \quad / \cdot 7 & & v^2 \cdot (280t_x - 12600) = 392 \\ v^2 \cdot (70t_x - 1225) &= 175 \quad / \cdot 4 & \implies & v^2 \cdot (280t_x - 4900) = 700. \end{aligned}$$

Teraz odčítajme prvú rovnicu od druhej,

$$7700v^2 = 308 \implies v = \frac{1}{5}.$$

Dosaďme v do niektorej rovnice, kde je len v a t_x,

$$\frac{1}{25} \cdot (40t_x - 1800) = 56 \implies t_x = 80.$$

Dosaďme v a t_x do niektorej z pôvodných rovníc,

$$\left(80 \cdot \frac{1}{5}\right)^2 + l_x^2 = 20^2 \implies l_x = 12.$$

Vypočítali sme, že Tomášova a Vladova loď boli k sebe najbližšie 80 min po deviatej, teda o 10:20 a ich vzdialenosť bola 12 km.

Fyzikálna úvaha o relativite pohybu, ktorá bola použitá v tomto riešení, však nie je vôbec triviálna. Preto teraz naznačíme, ako sa dala úloha riešiť aj bez jej použitia.

Iné riešenie:
Nasledujúce riešenie je založené na poznatkoch z analytickej geometrie.
Umiestnime si Vlada a Tomáša do súradnicovej sústavy tak, že v čase 9:00 (pre nás to bude čas $t = 0$) bol Vlado v bode $[0, 0]$ a Tomáš v bode $[0, 20]$. Vektory ich rýchlostí si označme ako (p, q) a (r, s). Potom v čase t budú mať ich lode súradnice $[pt, qt]$ a $[rt, st + 20]$, teda ich vzdialenosť je

$$l = \sqrt{(pt - qt)^2 + (rt - st - 20)^2},$$

čiže

$$l^2 = (pt - rt)^2 + (qt - st - 20)^2,$$

po úprave

$$l^2 = (p^2 + q^2 + r^2 + s^2 - 2pr - 2qs) \cdot t^2 + (40s - 40q) \cdot t + 400.$$

Všimnime si, že získaný vzťah nápadne pripomína kvadratickú funkciu. Naozaj, ak teraz zvolíme substitúciu $a = p^2 + q^2 + r^2 + s^2 - 2pr - 2qs$ a taktiež $b = 40s - 40q$, tak dostaneme

$$l^2 = at^2 + bt + 400.$$

Po dosadení hodnôt v časoch 9:35 a 9:55 (pre nás sú to časy $t = 35$ a $t = 55$) dostaneme 2 lineárne rovnice, ktorých korene sú $a = \frac{1}{25}$, $b = -\frac{32}{5}$. (Úplne správne riešenie by však malo obsahovať aj postup riešenia tejto sústavy!) Vyjadrili sme si teda vzdialenosť Vladovej a Tomášovej lode ako funkciu času

$$l^2 = f(t) = \frac{1}{25} \cdot t^2 - \frac{32}{5} \cdot t + 400.$$

Chceme nájsť čas, kedy boli lode k sebe najbližšie, inak povedané, hľadáme minimum funkcie $f(t)$. Táto funkcia je však kvadratická, čiže jej grafom je parabola (v našom prípade otočená nahor) a my vlastne chceme nájsť súradnice jej vrchola. To sme sa však už určite učili na strednej škole. Buď ho môžeme nájsť doplňaním na úplný štvorec

$$l^2 = f(t) = \frac{1}{25} \cdot t^2 - \frac{32}{5} \cdot t + 400 = \frac{1}{25} \cdot (t^2 - 160t + 6400 - 6400) + 400 = \frac{1}{25} \cdot (t - 80)^2 + 144$$

alebo pomocou vzorca, že vrchol má súradnice $[\frac{-b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}]$ (v našom prípade je $a = \frac{1}{25}$, $b = -\frac{32}{5}$, $c = 400$). Takto zistíme, že minimálna vzdialenosť je pre $t = 80$, teda o 10:20, a je to $\sqrt{144} = 12$ km.

Podstatou tohoto riešenia bolo objaviť vzťah

$$l^2 = f(t) = at^2 + bt + c.$$

a vyjadriť si funkciu f. Existuje viacero možných spôsobov, ako sa dá k tomuto vzťahu dospieť. Skúste sami objaviť niektorý z nich, ktorý vôbec nevyužíva analytickú geometriu.

Konečné poradie Letného semestra 33. ročníka

P.	Meno a priezvisko	Trieda	Škola	1.	2.	3.	4.	1.	2.	3.	4.	H	CS
1.	Martin Vodička	Kvarta	GAlejKE	9	9	9	8	9	9	9	8	1	88
2.	Jana Baranová	Septima	GAlejKE	9	9	8	7	9	9	9	3	4	80
2.	Martin Bachratý	3. B	GOkruŽA	9	9	9	8	9	9	9	-	2	80
4.	Róbert Tóth	Septima	GAlejKE	5	9	9	4	9	9	9	9	1	77
5.	Marek Kukan	3. B	GGrösBA	9	9	9	8	9	-	9	-	1	62
5.	Klára Ficková	1. A	GPoštKE	8	9	6	3	9	-	9	-	1	62
7.	Adam Midlik	7. A	GMudrPO	-	9	9	-	-	6	9	8	2	59
8.	Tomáš Babej	2. A	GPoštKE	9	-	2	6	-	6	9	8	2	54
9.	Dávid Hvizdoš	2. A	GPoštKE	9	-	9	7	-	5	-	8	1	52
10.	Radovan Hnatič	1. A	GPoštKE	-	2	2	5	4	5	8	8	0	47
11.	Monika Zlaczka	2. A	GPoštKE	9	2	5	6	-	5	5	3	0	46
12.	Monika Vaľková	Septima	GAlejKE	9	-	9	7	-	6	4	-	2	42
13.	Ivana Soláriková	Septima	GAlejKE	8	9	9	6	-	-	-	-	1	40
14.	Ladislav Bačo	3. A	GPoštKE	7	9	9	7	-	-	-	-	1	39
14.	Matej Večerík	Sexta A	GTeplBA	-	-	9	6	-	-	5	8	2	39
16.	Soňa Galovičová	1. B	GOkruŽA	9	-	-	-	9	-	-	-	0	36
16.	Petra Zibrínová	2. D	GMudrPO	2	-	3	6	5	5	6	1	0	36
18.	Miroslava Vašková	2. D	GMudrPO	-	2	3	5	5	5	5	1	0	34
19.	Matúš Stehlík	Sexta	GAlejKE	-	-	9	3	-	5	-	8	0	33
20.	Viktor Szabados	2. B	GGrösBA	2	-	6	4	-	6	4	-	0	30
20.	Denisa Múthová	2. A	GRužiŽA	2	6	2	2	5	1	5	-	0	30
22.	Ivana Gašková	Kvinta	GAlejKE	6	-	2	2	-	5	1	-	0	27
23.	Andrea Görcsösová	Septima	GAlejKE	9	-	-	-	5	5	-	3	0	25
23.	Daniel Till	1. A	GPoštKE	-	0	3	-	3	6	4	-	0	25
25.	Jakub Kireš	1. A	GPoštKE	-	-	3	3	-	6	2	-	0	23
26.	Kristína Faguľová	1. A	GPoštKE	4	0	-	-	1	5	3	-	0	22
27.	Peter Milošovič	2. A	GPoštKE	-	-	-	-	9	5	1	0	0	20
28.	Katarína Révészová	2. A	GPoštKE	7	-	2	5	-	-	-	-	0	19
29.	Sven Relovský	1. A	GPoštKE	1	7	1	2	-	-	-	-	0	18
30.	Ladislav Hovan	2. A	GExnáKE	-	-	9	4	-	-	-	-	0	17
31.	Jozef Lami	1. A	GPoštKE	-	0	1	2	-	3	4	-	0	16
32.	Michal Anderle	Sexta	GHaliLC	2	-	-	5	-	6	-	-	0	15
32.	Viktor Popovič	Septima	GMudrPO	-	-	-	-	-	5	3	4	0	15
34.	Alžbeta Bohiniková	Sexta	GGrösBA	-	-	3	2	0	5	1	-	0	14
35.	Miloslav Homer	1. A	GPoštKE	-	0	1	3	-	2	-	-	0	11
36.	Josef Tkadlec	R8. A	GJKPraha	9	-	-	-	-	-	-	-	1	9
37.	Jakub Šalagovič	Kvinta	GAlejKE	-	0	3	2	-	-	-	-	0	8
38.	Alexandra Pistráková	1. A	GPoštKE	-	1	2	-	-	-	-	-	0	5
39.	Nikola Daubnerová	2. C	GKomeSY	-	-	-	-	1	1	1	-	0	4

Pohár konštruktérov Letného semestra 33. ročníka

P.	Skratka	Škola	P.r.	Body
1.	GPoštKE	Gymnázium Poštová 9 042 52 Košice	15	459
2.	GAlejKE	Gymnázium Alejová 1 041 49 Košice	9	420
3.	GMudrPO	Gymnázium J. A. Raymana Mudroňova 20 080 01 Prešov	4	144
4.	GOkruŽA	Gymnázium Veľká okružná 22 011 09 Žilina	2	116
5.	GGrösBA	Gymnázium Grösslingova 18 811 09 Bratislava 1	3	106
6.	GTeplBA	Gymnázium Teplická 7 831 02 Bratislava 3	1	39
7.	GRužiŽA	Gymnázium bilingválne T. Ružičku 3 010 01 Žilina	1	30
8.	GExnáKE	Gymnázium Exnárova 10 040 22 Košice	1	17
9.	GHaliLC	Gymnázium Haličská cesta 9 984 03 Lučenec	1	15
10.	GJKPraha	Gymnázium Jana Keplera Parléřova 2 169 00 Praha 6	1	9
11.	GKomeSY	Gymnázium bilingválne Komenského 215 038 52 Sučany	1	4

Za podporu a spoluprácu ďakujeme

- Jednote slovenských matematikov a fyzikov, pobočka Košice
- Prírodovedeckej fakulte UPJŠ v Košiciach

Názov **STROM** – korešpondenčný matematický seminár
Číslo 6 • Máj 2009 • Letný semester 33. ročníka (2008/2009)
Internet: http://seminar.strom.sk
E-mail: strom@strom.sk

Vydáva: Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice
Internet: http://www.strom.sk
E-mail: zdruzenie@strom.sk