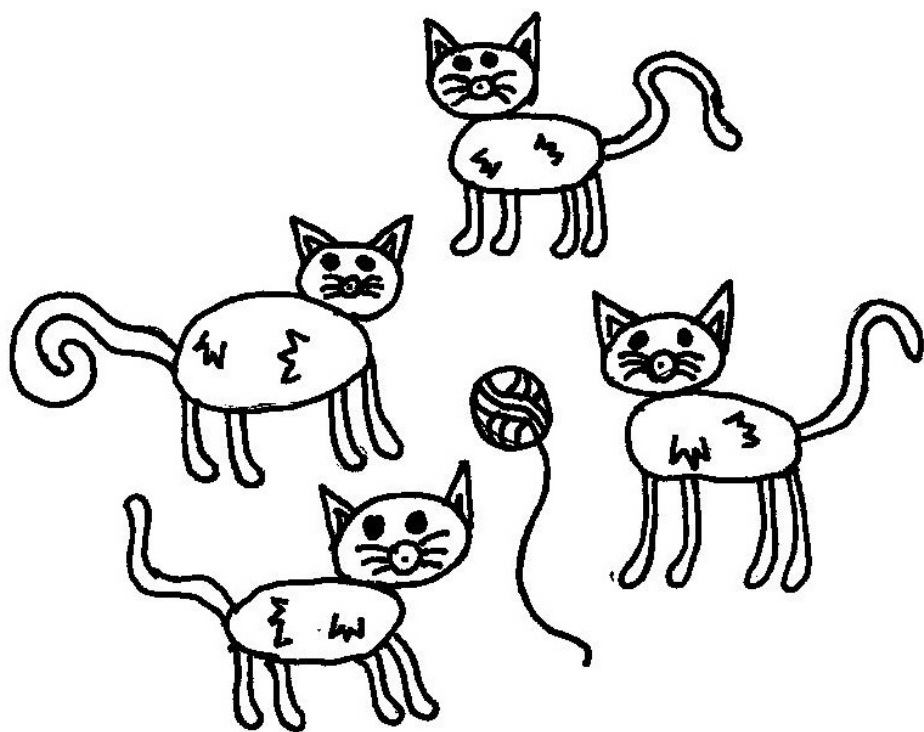


MALYŇÁR

ČÍSLO 4 — ROČNÍK 31

malynar.strom.sk



Ahoj!

Práve sa Ti dostal do rúk časopis MATEMATIKA! Je to matematický seminár, vďaka ktorému sa na konci polroka môžeš dostať preč zo školy na celý týždeň, počas ktorého zažiješ kopec zábavy a zaujímavých hier. Ak si štvrták, piatok alebo šiestak, je presne pre Teba! Stačí vyriešiť dvanásť (či toľko, koľko dokážeš) nevšedných úloh, ktorých riešenie nám pošleš dvakrát za polrok, my ich opravíme, a ak budú dostatočne dobré, môžeš očakávať zážitky ako nikdy predtým! V tomto časopise nenájdeš len spomínané úlohy, ale aj pravidlá. Tešíme sa na Tvoje riešenia!

vedúci MATEMATIKA

2% z daní

Aj tento rok je možné venovať 2% (v niektorých prípadoch dokonca až 3%) daní verejnoprospešným organizáciám, ako sme my.

Peniaze získané z 2% využívame na pokrytie časti nákladov spojených s aktivitami pre vás (kopírovanie časopisov, poštovné, ceny na súťažiach, aktivity na sústreďeniach...).

Chceme vás preto poprosiť, aby ste rodičom, členom svojej blízkej aj vzdialenej rodiny, susedom a pokojne aj cudzím ľuďom na ulici porozprávali o našich aktivitách a poprosili ich, aby svojou troškou podporili našu dobrovoľnícku činnosť a pomohli tým skupine mladých cieľavedomých ľudí zabezpečujúcich chod týchto úžasných seminárov, ktoré tak zbožňujete. Porozprávajte im, čo pre vás znamená sústredenie, čo vám dáva riešenie úloh semináru, a vysvetlite im, že takto podporia aj váš rozvoj a prispejú k zmysluplnému tráveniu vášho voľného času.

Potrebné informácie o tom, ako darovať 2%, nájdete na stránke nášho združenia <https://zdruzenie.strom.sk/sk/zdruzenie/2percenta/> a radi vám odpovieme na ľubovoľné otázky ohľadom našej podpory aj mailom na info@strom.sk.

Ďakujeme!

Pravidlá súťaže

Korešpondenčný matematický seminár **MALYNÁR** je súťaž pre žiakov 4. až 6. ročníka základných škôl, resp. prímy osemročných gymnázií. Zapojiť sa môžu aj mladší žiaci, v súťaži majú rovnaké podmienky a výhody ako štvrtáci.

Každý ročník pozostáva z dvoch semestrov – zimného a letného – ktoré sú zakončené matematickým sústredením pre najlepších riešiteľov. Jeden semester sa skladá z dvoch sérií, z ktorých každá obsahuje 6 úloh spravidla zoradených od najľahšej po najťažšiu.

Registrácia

Registrovať do semestra sa vieš vytvorením profilu na našej webovej stránke. Následne si vyplň povinné údaje v užívateľskom profile – Aktualizovať profil v sekcii Správa účtu. Tieto údaje potrebujeme, aby sme sa s tebou mohli skontaktovať aj v čase, keď nie si v škole, v prípade pozývania na sústredenie, a tiež, aby sme ťa mohli uverejniť v poradí riešiteľov aktuálnej časti semináru. Prihláška je povinná pre všetkých riešiteľov semináru. Na tejto stránke nájdeš aj svoje opravené a obodované riešenia, ak si ich posielal elektronicky.

Aby sme ti celý proces registrácie a vyplnenia profilu na našej stránke uľahčili, vytvorili sme na stránke seminar.strom.sk/media/uploads/navod.pdf jednoduchý návod.

Ako písať riešenie

Úlohy rieš samostatne, neodpisuj a ani nikomu nedávaj odpisovať, pretože za to **budeme strhávať body**. Výsledok úlohy, aj keď je správny, **nestačí**. Tvoje riešenie musí obsahovať podrobný **myšlienkový postup** – vysvetlenie, ako si pri riešení úlohy postupoval. Slovom rozhodne nešetri. Pri riešení a spisovaní úlohy **vychádzaj len zo zadania**, nikdy sa neopieraj o fakty, ktoré si sa dozvedel iba v príbehu okolo zadania. Riešenie každej úlohy píš na samostatný papier formátu A4, ak je na viacerých listoch, zopni ich. Texty zadania opisovať nemusíš. Každé riešenie musí mať v hlavičke **tvoje meno, triedu, školu a číslo úlohy**. Riešenia posielaj na adresu:

Združenie STROM, PF UPJŠ Jesenná 5, 041 54 Košice.

Pod odosielateľa uveď výrazne **MALYNÁR**.

Riešenia môžeš taktiež nahrávať pomocou založeného účtu na našej webovej stránke malynar.strom.sk. Všetky riešenia môžeš odovzdávať do 20.00. Dbaj na presné dodržanie termínu odovzdania, či už budeš riešenia posielat poštou alebo nahrávať cez web (za oneskorenie ti budeme strhávať body). V prípade technických problémov na našej strane posielaj riešenia na e-mailovú adresu riesenia@strom.sk s predmetom **MALYNÁR** vo formáte PDF (každé riešenie v samostatnom súbore) najneskôr v deň termínu série do 20.00. Riešenia budú prijaté a opravené len v prípade, že tvoj profil je kompletne vyplnený.

Bodovanie

Bodovanie úloh závisí od správnosti a kvality riešenia a za každú úlohu môže riešiteľ získať najviac 9 bodov. Body môžeš získať aj za čiastočné vyriešenie zadaných úloh, preto sa neboj poslať aj svoje neúplné riešenia. Ak budú obsahovať dobré nápady, radi ti za ne dáme nejaké body.

Do celkového poradia sa započítavajú body takto:

- **šiestaci a príma:** všetky vyriešené úlohy
- **piatáci:** päť najlepšie vyriešených úloh plus štvrtý najvyšší bodový zisk z týchto piatich úloh
- **štvrtáci:** päť najlepšie vyriešených úloh plus druhý najvyšší bodový zisk z týchto piatich úloh

Tretiaci a mladší budú hodnotení rovnako ako štvrtáci.

V prípade, že nie si spokojný s bodovým ohodnotením svojho riešenia, môžeš nám do dvoch týždňov od rozoslania riešenia mailom na adresu malynar@strom.sk zaslať sťažnosť a tá bude prešetrená.

Príklad

Traja bratia, šiestak Vlado, piatak Jaro a štvrták Marcel, vyriešili všetky úlohy úplne rovnako (zhodou náhod, že) – za 3, 2, 4, 1, 5 a 4 body. Vlado potom získal $3 + 2 + 4 + 1 + 5 + 4 = 19$ bodov, Jaro $(3 + 2 + 4 + 5 + 4) + 3 = 21$ bodov a Marcel $(3 + 2 + 4 + 5 + 4) + 4 = 22$ bodov. Jasný, nie?

Riešenia po termíne

V prípade, že svoje riešenie pošleš po termíne odovzdania, riešenie ti opravíme len v prípade, že nám bude doručené do štyroch dní od termínu série. V tomto prípade ti za oneskorenie strhneme body. Body sa strhávajú podľa dĺžky omeškania nasledovne:

- do 24 hodín: 2/3 bodov zaokrúhlené nahor
- viac ako 24 hodín a do štyroch dní: 1/2 bodov zaokrúhlená nahor
- viac ako štyri dni: riešenie neopravujeme

Vo výnimočných prípadoch môžeme body za riešenie neznížiť.

Odpisovanie

Body sa samozrejme bez výnimky strhávajú aj za odpisovanie. Pri odpisovaní rozlišujeme podobné riešenia (počet bodov delíme počtom zúčastnených a zaokrúhlime nadol) a „takmer kópie“, ktoré ostávajú bez bodu. Ak (náhodou) nájdeš úlohu riešenú v literatúre, uveď názov, autora a stranu, inak riskuješ stratu bodov za odpisovanie (je však potrebné napísať aj samotné riešenie).

Webová stránka

Ak máš nejaké otázky na nás alebo k zadaniam, tak neváhaj navštíviť naše webové stránky. Pri každej úlohe je diskusia, ktorá slúži na to, aby si sa mohol opýtať na nejasnosti ohľadom zadaní. Ďalšia možnosť, ako nás kontaktovať, je mailom na adresu malynar@strom.sk.

Sústredenie

Sústredenie je odmenou pre najlepších, príležitosťou naučiť sa niečo nové a stretnúť sa s ostatnými riešiteľmi. Zúčastnia sa ho najlepší riešitelia podľa záverečného poradia. Sústredenie je určené najmä pre štvrtákov až šiestakov základných škôl (a im príslušných ročníkov na osemročnom gymnáziu), mladší žiaci môžu byť pozvaní ako náhradníci. Účastníci a náhradníci sú pozývaní podľa poradia **MAJVNÁZ**a a Mامتا. V prípade nízkeho počtu riešiteľov je možné pozvať na sústredenie aj riešiteľov z minulého semestra podľa poradia.

Účasť na sústredeňí je podmienená účasťou na celej dĺžke trvania sústredenia. O prípadnú výnimku je nutné požiadať kontaktnú osobu e-mailom alebo v prihlasovacom formulári. Kontaktná osoba túto žiadosť posúdi a v čo najbližšom čase zašle odpoveď. V prípade porušenia tejto podmienky môžu organizátori účastníka nepozvať na najbližšie sústredenie.

Pár dobrých rád

Tu je zopár tipov a trikov, o ktorých si myslíme, že ti v budúcnosti pomôžu.

Základom je pochopiť zadanie

Ak si už niekoľkokrát čítaš zadanie, no stále si nevieš rady, máš tieto možnosti:

- Opýtaj sa svojich rodičov. Ver alebo nie, väčšinou ti dokážu pomôcť s pochopením zadania.
- Opýtaj sa nás. Nájdi príklad na našej stránke a v sekcii diskusia sa nás môžeš opýtať. Vždy ti radi pomôžeme.

Skúšať, skúšať, skúšať...

Možno to znie prevrapivo, pretože vetu „Skúšal som a vyšlo mi,“ alebo „Prišiel som na to skúšaním,“ vidíme v tvojom riešení obvykle neradi. Ale dosadiť si nejaké čísla nie je vôbec zlý začiatok. Takéto skúšanie (dosadzovanie) rôznych hodnôt, až kým nenarazíš na správny výsledok, však nie je matematický postup, ktorý by sme hodnotili veľkým bodovým ziskom. Je to spôsob, ktorý je tu pre teba, aby ti ukázal, odkiaľ približne „fúka vietor“, ak na začiatku nevieš, ako príklad vyriešiť.

Kresliť, kresliť, kresliť...

Kto nerád kreslí? Ak si príklad nakreslíš, môže ti to veľmi pomôcť. Nie vždy je ľahké si úlohu predstaviť. Bude sa ti jednoduchšie rozmýšľať, ak to, čo máš napísané v zadaní, uvidíš na obrázku priamo pred sebou. Kreslenie ti ukáže nové spôsoby, ako sa na príklad dá pozrieť.

Pozrimeže, na niečo som asi prišiel!

Dôležité je vysvetliť, čo to vlastne je, prečo to tak funguje a v neposlednom rade názorne ukázať, ako si prišiel na to, že je to pravda. Ak to vieš vysvetliť aj po matematickej stránke, tak je to obrovské plus. Tak sa totiž rodí 9-bodové riešenie.

Všetko si skontroluj

„Našiel som výsledok, o ktorom si myslím, že je správny, a mám aj postup. Dokonca viem vysvetliť, ako som naň prišiel.“

To si už skoro hotový. Teraz však prichádza dôležitá časť! Všetko si skontroluj, logická či numerická chyba ostane vždy chybou, ak ju prehliadneš. Daj si tiež pozor, aby si aj napriek správne riešeniu nakoniec neodpovedal na inú otázku, než na ktorú sme sa v zadaní pýtali.

Ak sme ti napísali, že z tvojho riešenia nám nie je jasné, ako si postupoval, neber to tak, že sme ťa pochopiť nechceli. Riešeniam spravidla rozumieme, no plný počet dostane len ten, kto dokáže vysvetliť, prečo je správne.

Zadania 1. série úloh letného semestra

Riešenia pošlite najneskôr do **4. apríla 2022**

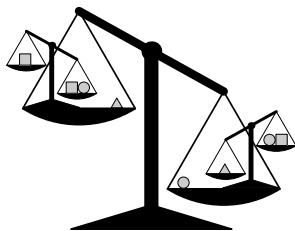
Nezabudni si vytvoriť či aktualizovať profil na malynar.strom.sk.

Pri riešení a spisovaní úloh prihliadaj len na informácie v zadaní konkrétnej úlohy, neopieraj sa o fakty, ktoré si sa dozvedel/a v príbehu.

„Vstávaj, už je skoro obed, mal si ísť spať skôr večer,“ skríkla cez otvorené dvere do mojej izby mama. Otvoril som oči. Cez zatiahnuté žalúzie v mojej izbe sa predieralo slnko. Vstal som, obliekol som sa a išiel som sa najesť. Po raňajkách sme sa s rodičmi vybrali na trh. Chceli sme kúpiť čerstvú zeleninu a ovocie. Po príchode na trh ma zaujala váha v jednom zo stánkov.

Úloha 1

Na váhach je tovar v tvare trojuholníkov, štvorcov a kruhov. Platí, že tovar rovnakého tvaru váži vždy rovnako a aj obe malé váhy sú rovnako ťažké. Zoradte jednotlivé druhy tovaru podľa ich hmotnosti od najťažšieho po najľahší.



Na trhu sme si kúpili mrkvu, banány, pomaranče a kivi. Spokojne sme si kráčali tienistou ulicou nazad domov, keď zrazu z bočnej uličky pred nami vyšiel malý chlapec. „Prosím, pomôžte mi, stratila sa moja malá mačička,“ povedal a hneď na to sa rozplakal. S mamou sme sa na seba pozreli. „Kde sa stratila?“ opýtal som sa ho. „Každé ráno chodíme spolu do prístavu na prechádzku.“ „Tak poďme do prístavu a nájdeme ju, dobre?“ „Dobre,“ povedal chlapec a usmial sa. Cestou do prístavu sme sa rozprávali. Povedal nám, že sa volá Juan a že má 10 rokov. Prístav mal len dve drevené móla. Rozdelili sme sa, ja s Juanom sme prehľadali prvé, mama s otcom druhé. Nič sme nenašli. Keď sme sa vracali z móla k otcovi a mame, zbadali sme, ako sa kúsok bokom od prístavu hraje 7 detí.

Úloha 2

Len jedno zo siedmich detí hovorí pravdu, a teda aj naozaj vie, čo sa stalo s Juanovou mačičkou. Deti sú postavené v rade vedľa seba. Keď sme sa ich spýtali, ktoré z nich hovorí pravdu, odpovedalo nám len zopár z nich. Tretí chlapec v rade povedal: „Pravdu hovorí buď prvý, alebo druhý.“ Štvrtý povedal: „Ten, ktorý hovorí pravdu, je vedľa mňa.“ Piaty chlapec mu povedal: „Buď pravdu hovorím ja, alebo šiesty chlapec.“ Ktorý z chlapcov hovorí pravdu?

„Nejakú malú hnedú mačku som videl, potom si ju nejaký ujo zobral do auta a odišiel po Ulici nádeje okolo pobrežia.“ Juan sa rozplakal. „Neboj, my ju nájdeme,“ snažil som sa ho upokojiť. „Chlapci, my ideme domov pripraviť obed, potom prídte pokojne obaja,“ povedala mama a spolu s otcom odišli. „No poď, Juan, ideme prezrieť tú ulicu.“ Prešli sme celú Ulicu nádeje až na koniec. Nič. Žiadne stopy po Juanovej mačičke. Ulica sa zmenila na kľukatú cestu pozdĺž pobrežia. Sadli sme si na autobusovú zastávku a čakali na autobus do susedného mesta, aby sme tam mohli pohľadať Juanovu mačku. Kým sme čakali, Juan vytiahol z vrečka 3 kartičky.

Úloha 3

Máme trojciferné číslo zložené z troch kartičiek. Následne prehadzovaním kartičiek s ciframi vytvoríme všetky ďalšie trojciferné čísla, ktoré takto vieme dostať. Získame takto práve 3 nové čísla. Súčet dvoch najmenších z týchto štyroch čísel je 1088. Aké cifry má pôvodné číslo?

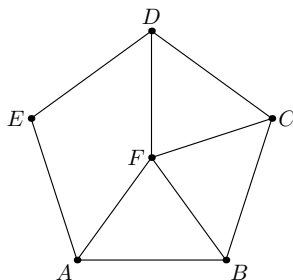
Čoskoro prišiel autobus. Kľukatou cestičkou sme sa asi za 1,5 hodiny dostali až do Valencie. Vystúpili sme pri obchodnom centre. Ani jeden z nás Valenciú dobre nepoznal, preto sme sa do hodiny stratili. V parku na námestí sme však našli mapu okolia.

Úloha 4

V Španielsku majú 6 miest A , B , C , D , E a F . Medzi mestami vedú cesty ako na obrázku, každá z nich má nejakú dĺžku v kilometroch (nie nutne celých). Zistite dĺžku cesty medzi A a E , ak platí:

- Všetky cesty medzi mestami majú dokopy 30 kilometrov.
- Ak ideme z mesta B okružnou trasou cez C , D , E , A naspäť do B , prejdeme spolu 22 kilometrov.
- Všetky cesty, ktoré vedú do mesta F , sú rovnako dlhé.
- Všetky cesty, ktoré vedú do mesta C , majú dokopy dĺžku 14 kilometrov.
- Cesta medzi A a B je rovnako dlhá ako cesta medzi D a E .
- Okružná trasa, ktorá začína aj končí v A , a ide postupne cez F , D , E , má dĺžku 11 kilometrov.

Dajte si pozor na to, že obrázok je len názorný, teda cesty, ktoré na ňom vyzerajú rovnako, môžu, ale nemusia mať rovnakú dĺžku v kilometroch v našej úlohe.



Prehľadali sme celý park, ale nikde nebolo ani stopy po Juanovej mačičke. Prešli sme sa po námestí. Boli sme bezradní, posledná stopa bola od nás 100 km! Boli sme si istý, že záhadný muž, ktorý uniesol Juanovu mačku musel autom ísť cez Valenciu, ale nemali sme ako vedieť či pokračoval ďalej, alebo ostal vo Valencii. Električkou sme sa odviezli na najväčšie valencijské sídlisko. Rozdelili sme sa. Prehľadávali sme námestie pri kostole na sídlisku, keď nás zaujali kachličky na námestí.

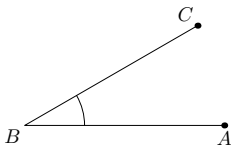
Edukačné okienko

Uhly

Predstavte si obyčajné ručičkové hodinky s dvoma ručičkami – hodinovou a minútovou. Tieto ručičky sa pohybujú rôznymi rýchlosťami, takže počas dňa sa nachádzajú v rôznych vzájomných polohách. Niekedy sa napríklad prekrývajú a niekedy ukazujú úplne opačným smerom. Chceli by sme vedieť nejako popísať, v akej polohe sú tieto ručičky. Nevieme zistiť ich vzdialenosť, keďže ručičky majú v strede hodiniek spoločný začiatok a potom sa od seba postupne vzdalujú. Ale môžeme si všimnúť, že ručičky stále rozdelia hodinky na dve časti. Budeme hovoriť, že ručičky vytvárajú uhol, pričom uhol je tá plocha medzi ručičkami. Keďže ručičky rozdelili hodinky na dve časti, tak vidíme že ručičky vytvorili dva uhly, ktoré môžu mať inú veľkosť. My sa však budeme zaoberať menším z týchto dvoch uhlov.

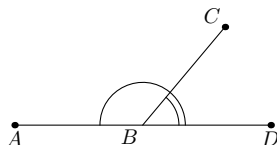
Uhol má svoju veľkosť a jednotku, ktorú používame, keď ju chceme určiť, nazývame **stupne**, tak ako napríklad používame metre, keď chceme zistiť dĺžku. Keď chceme zapísať 1 stupeň, napíšeme to ako 1° . Veľkosť uhla, ktorý tvoria celé hodinky (nerozdelené ručičkami) je 360° . Takže keď za hodinu minútová ručička prejde celý kruh, tak môžeme povedať, že prešla 360° . Keď ručičky rozdelia hodinky na dve presne rovnaké časti, tak oba uhly, ktoré vytvárajú majú veľkosť 180° . Vtedy tieto ručičky ležia na jednej priamke a takému uhlu preto hovoríme aj **priamy uhol**.

Uhly nevytvárajú len ručičky na hodinkách, ale aj úsečky, ktoré majú spoločný bod, aj priamky, ktoré sa pretínajú. Uhly vieme nájsť aj v rôznych útvaroch, napríklad štvorec má 4 uhly, jeden pri každom svojom vrchole. Uhol na obrázku vyznačujeme oblúčikom. Uhly budeme nazývať pomocou troch bodov: prvý bude bod na jednej z priamok, druhý bude bod, ktorý majú spoločný a tretí bude bod na druhej priamke (vždy to pomenujeme tak, aby spoločný bod priamok bol zapísaný v strede nášho uhla). Na obrázku vidíme uhol ABC (alebo aj CBA).

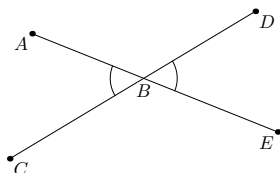


Teraz sa pozrime na nejaké základné fakty, čo platia o uhloch:

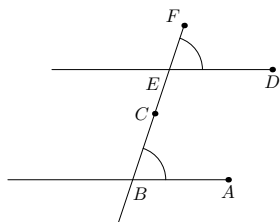
1. Vyznačené uhly na obrázku nazývame **susedné**. Platí pre nich, že ich súčet je 180° , lebo dokopy vytvárajú priamy uhol ($|\angle ABC| + |\angle CBD| = 180^\circ$).



2. Uhly na obrázku nazývame **vrcholové** a platí pre nich, že majú rovnakú veľkosť ($|\angle ABC| = |\angle DBE|$).



3. Keď máme dve rovnobežné priamky, ktoré pretína tretia priamka tak ako na obrázku, tak takéto uhly nazývame **súhlasné**. Tieto uhly majú rovnakú veľkosť ($|\angle CBA| = |\angle FED|$).



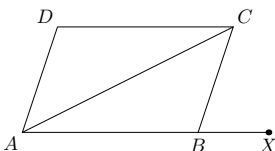
Teraz sa pozrime, ako vieme použiť tieto znalosti v úlohe.

Návodná úloha 1

V rovnobežníku $ABCD$ je strana AB rovnobežná so stranou CD a strana BC je rovnobežná so stranou AD . Aká je veľkosť uhla ABC , ak viete, že veľkosť uhla CAD je 42° a veľkosť uhla CAD je dvakrát väčšia ako veľkosť uhla BAC . Odporúčame vám skúsiť si najprv úlohu vyriešiť samostatne a až potom si prečítať jej riešenie.

Riešenie návodnej úlohy 1

Rovnobezník je štvoruholník, ktorého obe dvojice protilahlých strán majú rovnakú veľkosť a sú rovnobežné. Keďže vieme, že uhol CAD je dvakrát väčší ako uhol BAC a uhol CAD má veľkosť 42° , tak uhol BAC má veľkosť 21° . Uhly BAC a CAD spolu vytvárajú uhol BAD . Takže uhol BAD má veľkosť $42^\circ + 21^\circ = 63^\circ$. Teraz si môžeme predĺžiť úsečku AB a vyznačiť si bod X tak, aby nám tam vznikol uhol CBX . Všimnime si, že uhly BAD a XBC sú súhlasné, lebo úsečky AD a BC sú rovnobežné a úsečka AX ich pretína. Preto veľkosť uhla XBC je rovnaká ako veľkosť uhla BAD , teda 63° . Nakoniec použijeme to, že uhly ABC a XBC sú susedné, lebo spolu vytvárajú priamy uhol. Preto ich súčet musí byť 180° . Veľkosť uhla XBC poznáme, preto ľahko dopočítame veľkosť uhla ABC : $180^\circ - 63^\circ = 117^\circ$.



Pri riešení tejto úlohy sme si mohli všimnúť, že súčet uhlov ABC a BAD je 180° . Toto platí pre všetky rovnobežníky, takisto ako to, že protilahlé uhly v rovnobežníku majú rovnakú veľkosť. Môžete sa zamyslieť, prečo to vždy platí.

Ďalšia vec, ktorá sa často používa v úlohách je fakt, že **súčet uhlov v každom trojuholníku je 180°** . Čo sa týka trojuholníkov, tak poznáme aj dva špeciálne typy, v ktorých platia isté fakty. **Rovnostranný trojuholník** je taký trojuholník, ktorého všetky strany sú rovnako dlhé a všetky uhly majú rovnakú veľkosť (Akú?). **Rovnoramenný trojuholník** je taký trojuholník, ktorého niektoré dve strany majú rovnakú veľkosť. Potom aj dva uhly, ktoré zvierajú tieto strany s treťou stranou (nazývame ju základňa), majú rovnakú veľkosť. Pozrime sa, ako tieto znalosti môžeme použiť v úlohe.

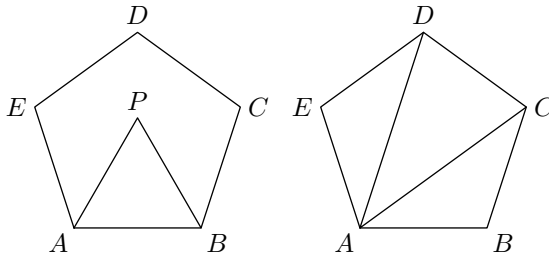
Návodná úloha 2

Je daný pravidelný päťuholník $ABCDE$ a v ňom rovnostranný trojuholník ABP . Aký veľký je uhol PBC ? Odporúčame vám skúsiť si najprv úlohu vyriešiť samostatne a až potom si prečítať jej riešenie.

Riešenie návodnej úlohy 2

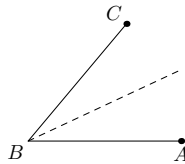
Keďže vieme, že súčet všetkých uhlov v trojuholníku je 180° a uhly v rovnostrannom trojuholníku sú rovnako veľké, tak každý uhol v rovnostrannom trojuholníku musí mať veľkosť $180 : 3 = 60^\circ$. Preto každý uhol v trojuholníku ABP je 60° . Všimnime si, že uhol ABP a uhol PBC spolu vytvárajú uhol ABC , čo je uhol v pravidelnom päťuholníku. Pre pravidelný päťuholník (tak ako aj pre

každý pravidelný mnohoúhelník) platí, že všetky jeho strany sú rovnako dlhé a všetky uhly rovnako veľké. Päťuholník si vieme rozdeliť na tri trojuholníky, ktorých všetky vrcholy sú vrcholmi päťuholníka. Všimnime si, že keď spočítame všetky uhly týchto trojuholníkov, tak sme vlastne spočítali všetkých 5 uhlov päťuholníka. No ale keďže súčet uhlov v trojuholníku je 180° , tak súčet uhlov v 3 trojuholníkoch bude $3 \cdot 180^\circ = 540^\circ$. Preto súčet 5 uhlov päťuholníka je 540° . Keďže tieto uhly sú rovnako veľké, tak jeden uhol pravidelného päťuholníka má veľkosť $540^\circ : 5 = 108^\circ$. Teda uhol ABC má veľkosť 108° . Teraz už vieme vypočítať veľkosť uhla PBC ako rozdiel uhlov ABC a ABP , lebo ABP a PBC spolu vytvárajú uhol ABC . Veľkosť uhla PBC je $108^\circ - 60^\circ = 48^\circ$.



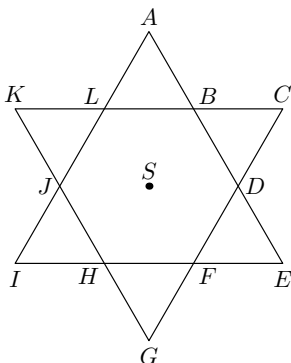
Podobným postupom si vieme vypočítať súčet uhlov v hocijakom mnohoúhľníku, stačí keď si ho rozdelíme na trojuholníky, ktorých vrcholy sú vrcholmi mnohoúhľníka.

Posledná vec, ktorú si spomenieme je os uhla. **Os uhla** ABC je priamka, ktorá rozdeľuje uhol ABC na dva rovnako veľké uhly. Do obrázku sa väčšinou zakresľuje prerušovanou čiarou.



Úloha 5

Pravidelná šesťcípá hviezda $ABCDEFGHIJKL$ so stredom S , ktorá vznikla preložením dvoch rovnakých rovnostranných trojuholníkov ako na obrázku, má obsah 96 cm^2 . Platí, že body prieniku B, D, F, H, J a L sú rovnako vzdialené od stredu S . Vypočítajte obsah štvoruholníka $ABCF$.

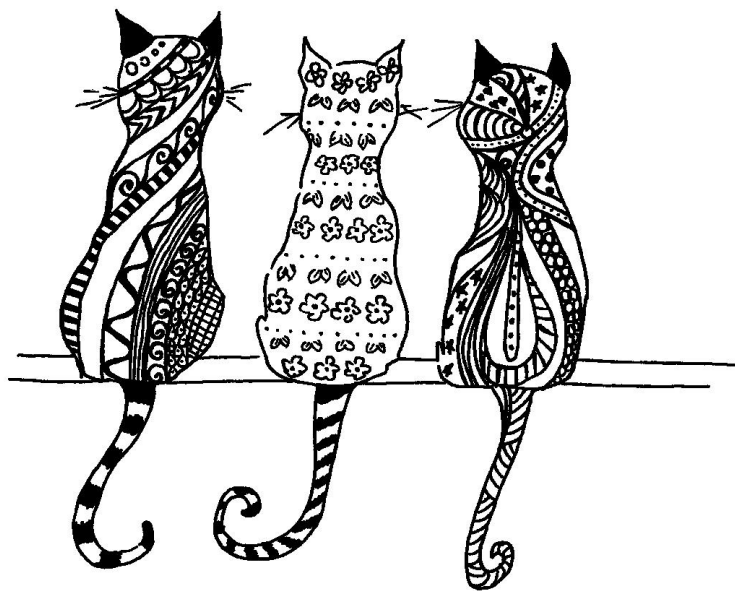


Preskúmavali sme detské ihrisko na sídlisku, keď na mňa Juan zakričal: „Aha, tu niečo je,“ zavolať ma, „to je srst rovnakej farby ako má moja Ľupilda. Stavím sa, že je to jej srst.“ „Ale čo robí tu, na detskom ihrisku?“ „To neviem, ale aspoň vieme, že tu bola.“ „Mňa teraz skôr trápi, kde budeme spať. Sme predsa v cudzom meste a už sa stmieva,“ povedal som. „A ja som už aj hladný...“ dodal Juan. „Ešte tu chvíľu ostaneme, či nenájdeme nejakú stopu a potom pôjdeme do nejakej reštaurácie a tam sa najeme.“ „Dobre,“ prikývol Juan. Do polhodiny sme sedeli v Reštaurácii u Pabla. Obaja sme si dali grilovanú rybu. Až pri platení nám došlo, že nemáme dostatok peňazí na zaplatenie jedla. Čašník zavolať majiteľa a ten nám dal úlohu, ktorú máme vyriešiť, aby ho už nemátala v hororových snoch.

Úloha 6

Na šachovnici tvaru 25×25 sú umiestnené figúrky, ktoré útočia podľa osobitných pravidiel. Figúrka v bielom poli napáda všetky biele polia v rovnakom riadku a všetky čierne polia v rovnakom stĺpci a figúrka v čiernom poli napáda všetky čierne polia v rovnakom riadku a všetky biele polia v rovnakom stĺpci. Určte maximálny počet figúrok, ktoré je možné umiestniť na hraciu plochu tak, aby sa neohrozovali. Zdôvodnite, prečo sa tam viac figúrok nedá položiť.

„Ďakujem vám, mládenci.“ „Nie je zač, pane, radi sme vám pomohli,“ odvetil som. Spokojní a najedení sme vyšli z reštaurácie. Slnko už zapadlo. Jediné svetlo bolo z pouličných lúčok. Kráčali sme si do mierneho kopčeka nad mesto úzkymi ulicami. Cez cestu zrazu prešla mačka. „To je moja Ľupilda!“ zvolal celý bez seba Juan. „Rýchlo za ňou!“ zakričal som na Juana. Vbehli sme do bočnej uličky. V uličke neboli lampy, takže tam bola tma ako vo vreci. Utekal som najrýchlejšie, ako som vedel, Juan bol hneď za mnou. Ľupilda sa mohla niekam schovať a my by sme to v tej tme ani nezistili. Ešte k tomu bola na každom rohu nejaká križovatka. Raz sme odbočili dolava, inokedy doprava, niekedy sme išli rovno. Odrazu som pocítil náraz. Zatočila sa mi hlava a spadol som.



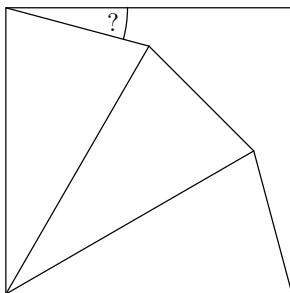
Zadania 2. série úloh letného semestra

Riešenia pošlite najneskôr do 2. mája 2022

„Č-Č-Čo sa to stalo?“ opýtal som sa Juana. „Narazil si do steny.“ „Tebe sa nič nestalo?“ „Nie no, akurát mám také obavy, že sme sa stratili.“ „To hej, bežali sme sám neviem kam.“ „Vidiš tú vežu?“ opýtal sa ma Juan, „odtiaľ určite bude vidno hlavné námestie a asi aj cestu naň, rovnako bude vidno aj nejakú cestu na kopec nad mestom.“ „D-Dobre, poďme na tú vežu, dúfam, že ešte budú mať otvorené,“ povedal som stále zmätený. Hoci sme k veži prišli okolo tri štvrté na desať, stále mali otvorené. Predavačka lístkov nás hore pustila zadarmo. Veža mala veľmi zaujímavé schody.

Úloha 1

Na obrázku je štvorec, v ktorom sa nachádzajú 3 schody, ktoré mali tvar rovnakých rovnoramenných trojuholníkov. Strany štvorca, ktoré zvierajú uhol hore vpravo, sú steny veže. Aký veľký je uhol medzi bočným schodom a stenou veže?



„Aha, tadiaľ sa ide do centra a tadiaľ zasa na kopec nad mestom.“ „Neviem ako ty, Juan, ale ja by som teraz určite radšej išiel do centra.“ „Dobre, poďme do centra.“ Ešte dlho sme sa vymotávali z labyrintu valencijských zákutí a následne sme dlho dole kopcom pokračovali na námestie. Na námestí sa vytvoril zhluk ľudí okolo stánku s kúzelníkom.

Úloha 2

Kúzelník má v krabičke 3 kartičky, na každej z nich je iná cifra v rozmedzí od 1 po 9. Súčet dvoch najmenších dvojciferných čísel, ktoré sa z kartičiek dajú poskladať, je 75, súčet dvoch najväčších je 170. Zistíte, aké cifry má kúzelník na kartách.

„To je predsa jednoduché,“ povedal Juan. „Gratulujem, chlapci!“ zagratuloval nám kúzelník. „Máte talent, nechcete sa priučiť za kúzelníka?“ opýtal sa nás. „Veľmi radi by sme sa priučili za kúzelníkov,“ dodal na záver Juan. „Budete musieť počkať na koniec môjho vystúpenia, potom ťa priučím. Zatiaľ sa môžeš pozerieť na vystúpenie alebo si môžete ísť pozrieť finálový turnaj La Ligy.“ Kúzelník nám povedal, ako sa dostaneme na štadión, dal nám nejaké peniaze na lístky a s Juanom sme sa zhodli, že

si vezmeme autobus alebo električku. Na zastávku to bola len chvíľka. Nastúpili sme do autobusu a odviezli sa až na miestny štadión. Na štadióne bolo veľmi veľa ľudí. Stihli sme síce len posledné 2 zápasy, ale ľudia o nich hovorili ako o dvoch najlepších a najnapínavejších. Pri východe zo štadióna sme si všimli rozpis zápasov a finálovú tabuľku.

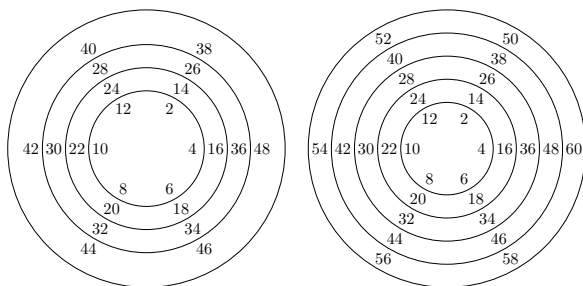
Úloha 3

V turnaji súťažilo 6 tímov a každý tím odohral 2 zápasy s každým iným tímom. Za víťazu získal tím 3 body, za remízu 1 bod a za prehru 0 bodov. Prvé 3 tímy mali rovnako veľa bodov. Aký je najvyšší možný počet, ktorý mohli tieto prvé tri tímy získať? Zdôvodnite, prečo nemohli získať viac bodov.

Po turnaji sme sa odviezli autobusom nazad do centra Valencie. Tam na nás už čakal kúzelník. „No ako chlapi, bavili ste sa?“ opýtal sa nás. „Áno, ďakujeme, že ste nám o tom povedali a že ste nám dali peniaze na lístky,“ povedal som. „To je v poriadku. Poďte, pôjdeme ku mne domov.“ Tmavými zákutiami Valencie sme sa asi za 25 minút dostali k peknému farebnému dvojposchodovému domu. Kúzelník otvoril čarovným kľúčom svoje čarovné vchodové dvere a postupne sme všetci vošli do predsieni. Tam sme sa vyzuli a kúzelník nám ukázal, čo má v kúpeľni a v spálni. V spálni nás oboch veľmi zaujali jeho trezory, v ktorých vraj schováva vzácné kúzelnícke karty.

Úloha 4

Kúzelník má 2 trezory. Na trezoroch je špeciálny číselný zámok, ktorý sa skladá z otáčateľných kruhových pásov s číslami. Zámok sa otvorí, ak budú čísla usporiadané v šiestich stĺpcoch smerom od stredu a v každom stĺpci bude súčet čísel rovnaký. Dajú sa trezory nižšie otvoriť?



Kúzelník nám ukázal nejaké zaujímavé kúzla s kartami a potom sme sa presunuli do kuchyne. V nej mal kúzelník veľa magických hrncov, ktoré vedeli instantne uvariť hocijaké jedlo, stačilo do hrnca hodiť suroviny a povedať magickú formulu „Čáry-máry-fuk“. Takýmto spôsobom nám kúzelník uvaril segedínsky guláš. Keďže od posledného jedla ubehla nejaká doba a s Juanom sme boli hladní, zjedli sme úplne všetok guláš, čo kúzelník uvaril. Keď sme dojedli, slnko už bolo na obzore. Pokračovali sme prehliadkou poschodia, kde nám ukázal aj 2 izby, v ktorých môžeme spať

kým sme vo Valencii. Na poschodí bol takisto aj obrovský sklad jeho magického náčinia a fotiek z jeho vystúpení. Vonku nám ukázal záhradu za domom, kde mal aj kvety, ktoré vedeli meniť farbu a fontánu, na ktorej vedel nastaviť intenzitu prúdu vody. V zadnej časti záhrady sa nachádzal aj bazén s plastovými loptičkami.

Úloha 5

Na stole sú 4 krabice s loptičkami, v každej je na začiatku 10 loptičiek. Zároveň máme pri stole bazén s neobmedzeným množstvom loptičiek. V každom ťahu môžeme urobiť jeden z troch krokov, ak je možné taký krok urobiť:

- *Zobrať z každej krabice 1 loptičku a hodiť ich do bazéna.*
- *Vybrať z niektorej krabice 3 loptičky a rozdeliť ich po 1 do zvyšných 3 krabíc.*
- *Vybrať z bazéna 4 loptičky a dať 2 z nich do niektorej krabice a zvyšné 2 do inej krabice.*

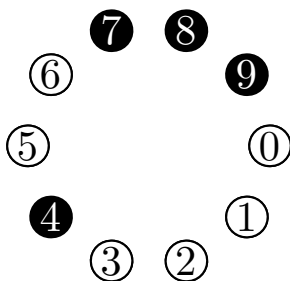
Rozhodnite, či je možné vhodnými ťahmi dosiahnuť, že v krabiciach budú postupne 1, 2, 3 a 4 loptičky.

Okrem iného sme sa v bazéne všetci traja zabávali. Bláznili sme sa vyše 2 hodiny. Potom nás kúzelník naučil nejaké kúzla na večer, aby sme si ich v meste mohli vyskúšať. Do centra sme išli už skôr, ešte sme chceli ísť na grilovanú rybu. Nechcelo sa nám čakať na večernú hodinu, keď si ľudia vyjdú do ulíc, aby sa bavili nočným životom, preto nás kúzelník Ricardo zobral za svojím kamarátom Hernanom. Hernan bol takisto kúzelník. Tomu sme ukázali naše kúzla a ten povedal, že sme talentovaní a že na nás musí byť Ricardo hrdý. Ukázal nám aj hru, ktorú s Ricardom zvykli po večeroch ako chlapci hrať.

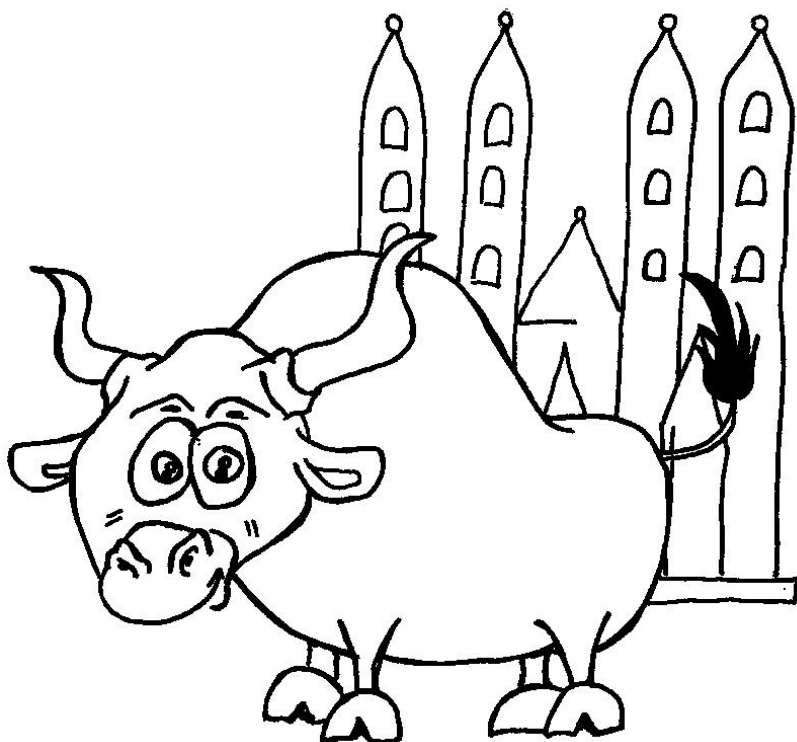
Úloha 6

V kruhu leží niekoľko mincí (viac ako 2), pričom na začiatku žiadna dvojica susedných mincí nie je otočená rovnako. Ricardo a Hernan sa striedajú v ťahoch. Ten, čo je na rade, musí otočiť súvislý úsek mincí otočených rovnakou stranou nahor susediaci s mincami otočenými naopak. Prehráva ten, po ktorého ťahu sú všetky mince otočené rovnako. Ricardo vyberá, kto bude začínať. Ako si má Ricardo v závislosti od počtu mincí vybrať, aby bez ohľadu na Hernanove ťahy vždy vyhral?

Dodatok pre lepšiu predstavu: Ak by sme mali 10 mincí rozložených ako na obrázku, potom ten, kto je na ťahu, môže otočiť buď mince 0, 1, 2, 3, alebo iba mincu 4, alebo mince 5 a 6, alebo mince 7, 8 a 9.



Ricardov kamarát Hernan nás naučil nejaké ďalšie kúzla, a tak sme od neho večer odišli ešte pripravenejší na náš večerný kúzelnícky debut.



- Názov:** MALYNÁR – korešpondenčný matematický seminár
Číslo 4 • Február 2022 • Letný semester 31. ročníka
- Web:** malynar.strom.sk
- E-mail:** malynar@strom.sk
- Riešenia:** Prijímame odovzdaním na webe, poštou a len v prípade poruchy na adrese riesenia@strom.sk
- Organizátor:** Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach,
Prírodovedecká fakulta, Šrobárova 2, 041 54 Košice
Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice

Organizačný poriadok korešpondenčných matematických seminárov Malynár, Matik, STROM je zaregistrovaný na Ministerstve školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky pod číslom 2017/13750:2-10B0.