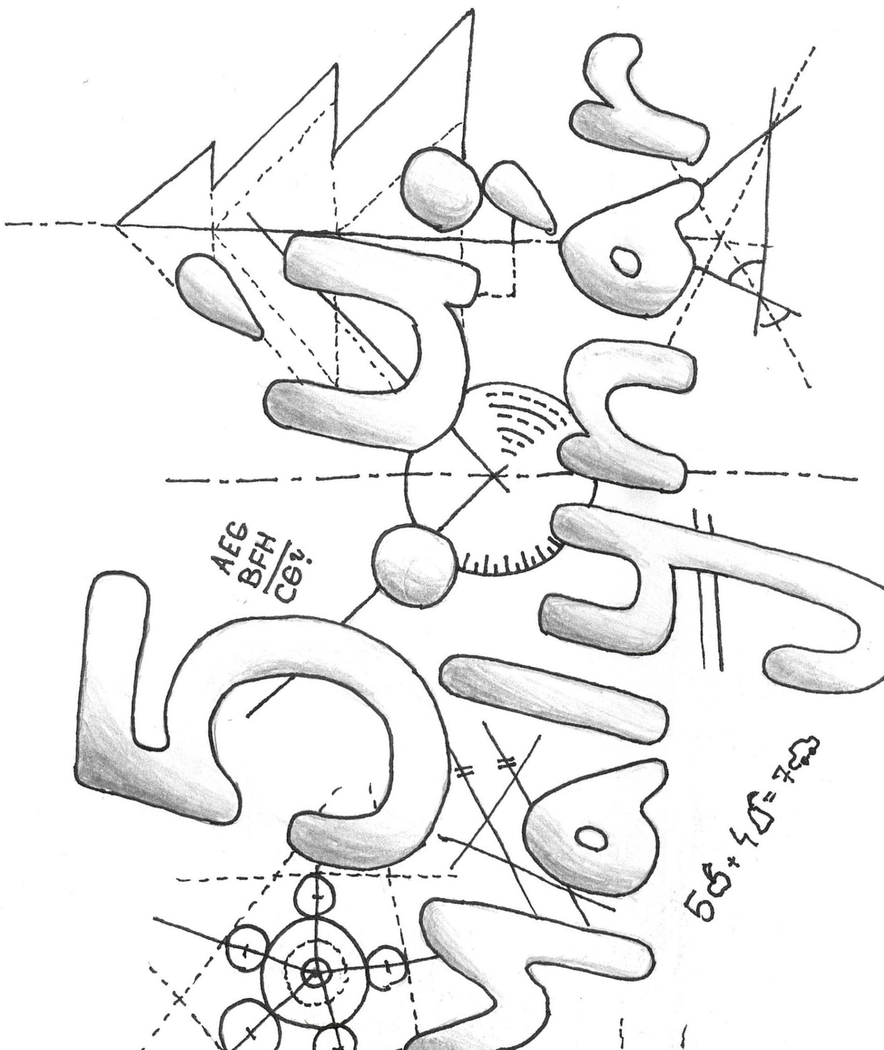


http://malynar.strom.sk

Čaute Malynárčatá!

A máme tu opät koniec školského roku! Každý, kto poslúchal a počítal Malynár, dostane darček. Ten máte, ako už obvykle, pribalený s týmto časopisom. Áno, sú to vaše riešenia. Tí z vás, čo „poslúchali“ najviac, budú mať už čoskoro možnosť dokázať svoje matematické, ale i iné kvality, na už pripravovanom sústredení. Veríme, že chuť počítať neopustí ani tých, čo takéto šťastie nemali. Letné prázdniny sú už za rohom. Nech si ich už užijete akokoľvek, v septembri na vás čaká čerstvá dávka príkladov! Tešíme sa na vás.

Vaši Opravovatelia

Prímania a Šiestaci pozor!

Nesmúťte za krásnymi rokmi strávenými s Malynárom. Krásny seminárový život pre vás nekončí a ani matematický seminár. Je tu pre vás *MATIK* , pokračovanie seminára Malynár, kde na vás čakajú noví vedúci, nové úlohy a väčšie výzvy. Tak neváhajte a prekonajte ich!

Výlet

Mladých, starých, súčasných, minulých a aj budúcich riešiteľov seminárov Malynár a *MATIK*, vás všetkých očakávame na výlete, ktorý sa bude konať 8. 6. 2013. Stretneme sa 8:20 na autobusovej stanici v Košiciach alebo 9:25 na autobusovej stanici v Prešove. Cieľom našej cesty bude Šarišský hrad. Odporúčame pevnú obuv, oblečenie primerané počasiu, veľa pitia, nejaké jedlo a kopec dobrej nálady :) Cestovné by nemalo presiahnuť 5,50 eur, so zľavou polovicu. Tešíme sa na teba.

Vzorové riešenia úloh 2. série Letnej časti

Úloha č. 1:

opravovali Jano Dudič & Robo Schönfeld

Lujza Milotová

Zadanie: Logaritmaus a jeho vojaci sa chcú dostať na druhú stranu tunela. Logaritmaus prejde tunel za 1 minútu, Vrhač zlých pohľadov za 2 minúty, Bojovník s rečou za 4 minúty a Ostrostrelec za 5 minút. Cez úzky tunel, bohužiaľ, môžu naraz prejsť maximálne dvaja, pričom sa pohybujú rýchlosťou toho pomalšieho. Majú k dispozícii len jeden lampáš, ktorý vydrží svietiť len 12 minút a Logaritmaus, Vrhač, Bojovník aj Ostrostrelec trpia tmofóbiou (strachom z tmy), takže si musia celou cestou týmto tmavým tunelom svietiť týmto lampášom. Môžu všetci prejsť na druhú stranu?

Riešenie: Pre prehľadnosť nazvime Logaritma L, Vrhača zlých pohľadov V, Bojovníka s rečou B a Ostrostrelca O. Máme zistiť, či je možné, aby sa všetci dostali na druhú stranu tunela za 12 minút a s jedným lampášom. Aby sme len neskúšali rôzne náhodné kombinácie, urobme nejaké pozorovania, ktoré nám pomôžu to správne poradie nájsť.

Stále, keď dvaja prejdú tunelom, trvá im to tak dlho, ako by to trvalo tomu pomalšiemu z dvojice. To znamená, že ak pôjde B spolu s V, zaberie im to len 4 minúty. Je to najzákladnejší spôsob, ako ušetriť nejaký čas. Preto sa teraz pozrime, pri akom párovaní dokážeme ušetriť najviac času.

Ak pôjde každy sám, tak im to zaberie spolu $1+2+4+5 = 12$ minút, čo je fajn, ale každý z nich by potreboval vlastný lampáš.

Ak pôjde L spolu s O a V spolu s B, tak im to trvá $5+4 = 9$ minút a potrebujú 2 lampáše.

Ak pôjde L spolu s B a V spolu s O, tak potrebujú spolu $4 + 5 = 9$ minút a 2 lampáše.

Ak pôjde L spolu s V a B spolu s O, tak potrebujú na prechod tunela $2 + 5 = 7$ minút a 2 lampáše.

Je nutné si uvedomiť, že lampáš je len jeden, a teda niekto musí doniesť lampáš naspäť na začiatok. Ako teda vracať lampáš na začiatok a spotrebovať čo najmenej času? Prvá možnosť je, že lampáš bude na začiatok vracať vždy ten najrýchlejší zo skupinky. Druhá, že sa bude lampáš na začiatok vracať čo najmenej krát.

Prvá možnosť nám jasne hovorí, že lampáš bude nosiť na začiatok iba Logaritmaus. To nutne znamená, že v každej dvojici cestujúcej zo začiatku na koniec tunela musí byť L, aby sa s lapášom potom mohol vrátiť. Teda ani nie je dôležité, v akom poradí pojde s ostatnými cez tunel. Napríklad takto:

L ide spolu s O (5 minút), L sa vracia (1 minúta), L ide spolu s B (4 minúty), L sa vracia (1 minúta), L ide spolu s V (2 minúty). Spolu to je $5+1+4+1+2 = 13$ minút. A to je viac ako nami požadovaných 12 minút.

Druhá možnosť sa nás pýta, koľko najmenej krát sa bude musieť niekto vrátiť. Na dvakrát nám to nevyšlo, dá sa to teda na jedenkrát? Nuž, nie. Bez ohľadu na to, ktorí dvaja pôjdu na druhú stranu ako prví, jeden z nich sa musí vrátiť, a tak máme na konci iba jedného človeka a na začiatku troch. A keďže naraz môžu ísť len dvaja, niekto sa musí vrátiť po toho posledného. Najmenej dvakrát sa teda niekto bude musieť vrátiť.

Na prvý pohľad to teda nestíhajú. Ale vzali sme do úvahy naozaj všetko? Nie! Veď hneď na začiatku sme si povedali, že najviac času pri ceste zo začiatku na koniec ušetríme ak pôjdu spolu L a V ; B a O. A takú dvojicu sme v našom riešení nemali. Chceme teda tieto dvojice, chceme aby sa vracali práve dvakrát a aby sa vracal L a V každý raz (lebo už sme si ukázali, že ak sa bude vracať dvakrát L, nebude to fungovať).

Keďže sa vraciať majú L alebo V a sú v jednej dvojici, musia ísť ako prví (2 minúty), teraz sa jeden z nich vráti. Povedzme, že L sa vráti (1 minúta). Nasleduje prechod dvojice B a O (5 minút). Tentokrát sa vracia V (2 minúty), no a nakoniec sa L a V presunú opäť na koniec tunela (2 minúty). Spolu to je $2+1+5+2+1 = 12$ minút. A to je to, čo sme chceli!

Nakoniec si ešte povedzme, čo by sa stalo, ak by sa prvý vracal V a druhý L. Nuž nestalo by sa nič, lebo tak či onak by sa obaja vracali práve raz a tak či onak by sa zo začiatku na koniec presúvali v tých istých dvojiciach.

Komentár: Najväčším problémom tejto úlohy bolo, že ste sa na ňu vôbec nesnažili pozrieť z rôznych strán. Mám teraz na mysli tých, ktorí poslali odpoveď: Nie, nemôžu to stihnúť. Takmer každý z vás sa uspokojil s tým, že napísal jedno z možných usporiadaní, zhodou okolností to nesprávne, a považoval to za jediný možný výsledok. Niekoľkí ste boli veľmi blízko urobiť ten posledný krôčik od zlého z správnemu výsledku, no neurobili ste ho a tak aj krásne popísané riešenia obišli s malým počtom bodov. Nuž a k tým, ktorí si mysleli, že stačí napísať: Ide to takto: blah blah blah, nuž stačí to na veľa bodov, nie však na všetky. 9 bodov dostali len tí, ktorí podrobne popísali naozaj všetko. Gratulujeme Lujze k najkrajšiemu riešeniu, radosť čítať :)

Úloha č. 2:

opravovali Lucka Magurová & Lucka Leličová

Gabriela Genčiová

Zadanie: Logaritmaus rozdelil 35 mužov na 5 skupín tak, že žiadna zo skupín nemala rovnako veľa mužov. Počet mužov v ktorýchkoľvek troch skupinách je väčší ako počet mužov v ostatných dvoch skupinách. Koľko najmenej mužov môže byť v jednej skupine? Napíš aj, prečo tam menej nemôže byť.

Riešenie: Máme dve podmienky, a to:

1.) žiadna zo skupín nemá rovnaký počet mužov

2.) počet mužov v ktorýchkoľvek troch skupinách je väčší ako počet mužov v ostatných dvoch skupinách.

Na to, aby nám platila druhá podmienka, musíme mužov do skupín rozdeľovať rovnomerne, teda tak, aby rozdiel medzi súčtom troch najmenších a súčtom dvoch najväčších skupín bol čo najmenší. Najideálnejšie by bolo rozdeliť mužov do skupín po $35 : 5 = 7$ mužov, to by ale neplatila prvá podmienka. Ak má platiť druhá podmienka, stačí nám sčítať počet mužov v dvoch skupinách, kde je počet mužov najväčší, a porovnať ho so súčtom mužov vo zvyšných troch skupinách, kde je ich počet najmenší. Ak bude platiť, že v týchto troch skupinách je viac mužov ako vo zvyšných dvoch, bude to platiť aj pre ostatné možnosti porovnávania.

Ak by najmenší počet mužov v skupine bol 1, počet mužov v ostatných skupinách by musel byť 7, 8, 9 a 10, aby bola splnená prvá podmienka. Ak to nebude platiť pre takéto rovnomerné rozvrhnutie, môžeme si byť istí, že nebude platiť ani pre iné (napr. 1, 6, 8, 9 a 11 a pod.) Ale keďže súčet počtu mužov v dvoch najväčších skupinách nie je menší ako súčet počtu mužov v troch najmenších skupinách $1 + 7 + 8 < 9 + 10$ $(16 < 19)$, tak 1 muž v najmenšej skupine nám nevyhovuje. A teda najmenšia skupina musí mať viac ako 1 muža. Rovnako postupujeme pre ďalšie čísla 2,3,4…

Ak by najmenší počet mužov v skupine bol 2, je súčet troch najmenších skupín menší ako súčet dvoch najväčších skupín $2 + 6 + 8 < 9 + 10$ $(16 < 19)$, a tak ani počet 2 muži v najmenšej skupine nám nevyhovuje. A teda najmenšia skupina musí mať viac ako 2 mužov.

Ak by najmenší počet mužov v skupine bol 3, je súčet troch najmenších skupín menší ako súčet dvoch najväčších skupín $3 + 6 + 7 < 9 + 10$ $(16 < 19)$, a tak ani počet 3 muži v najmenšej skupine nám nevyhovuje. A teda najmenšia skupina musí mať viac ako 3 mužov.

Ak by najmenší počet mužov v skupine bol 4, je súčet troch najmenších skupín menší ako súčet dvoch najväčších skupín $4 + 6 + 7 = 8 + 10$ $(17 < 18)$, a tak ani počet 4 muži v najmenšej skupine nám nevyhovuje. A teda najmenšia skupina musí mať viac ako 4 mužov.

Ak by najmenší počet mužov v skupine bol 5, je súčet troch najmenších skupín väčší ako súčet dvoch najväčších skupín $5 + 6 + 7 > 8 + 9$ $(18 > 17)$. Najmenší počet mužov v skupine, ktorý vyhovuje obom podmienkam, je 5 mužov.

Tým sme vlastne aj ukázali a vysvetlili, prečo v najmenšej skupine nemôže byť menej ako 5 mužov.

Komentár: Väčšina z vás si s úlohou hravo poradila. Body ste strácali hlavne vtedy, keď ste nedostatočne vysvetlili, prečo pre menej ako 5 nemôže byť. To, že to neplatí pre 4, neznamená, že to nemôže platiť pre 3, 2 alebo 1. Nabudúce si na to dajte lepší pozor, nech vám zbytočne nemusíme sťahovať body.

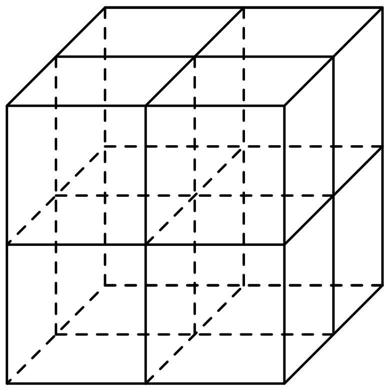
Úloha č. 3:

opravovali Tina Oravcová & Terka Volavková

Radovan Lascák

Zadanie: Máme 8 kociek veľkosti $1 \times 1 \times 1$, ktorých steny ofarbíme modrou alebo žltou farbou (ofarbujeme celú stenu jednou farbou, ale kocka môže mať steny rôznych farieb). Z takto pofarbených 8 kociek chceme poskladať jednu kocku veľkosti $2 \times 2 \times 2$. Ako máme ofarbiť kocky $1 \times 1 \times 1$, aby sme vedeli zložiť kocku $2 \times 2 \times 2$, ktorá bude celá modrá a navyše, ak malé kocky pootočíme, získame kocku $2 \times 2 \times 2$, ktorá má všetky strany žltej farby?

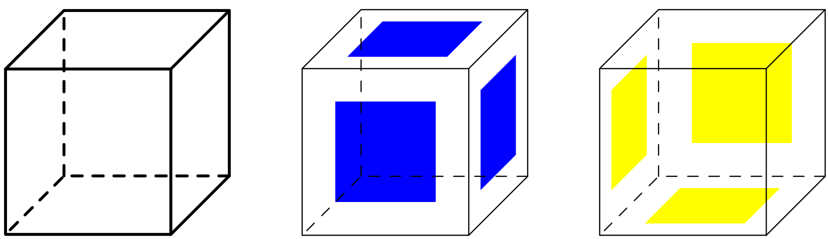
Riešenie: Na začiatok sa pozrime, ako bude vyzerať kocka postavená z 8 malých kociek.



Každú stenu veľkej kocky tvoria 4 steny malých kociek, a keďže stien veľkej kocky je 6, spolu je to $4 \cdot 6 = 24$ malých stien, ktoré na povrchu veľkej kocky vidíme. Zrátajme teraz, koľko stien majú všetky malé kocky spolu. Každá má 6 a kociek máme 8, takže $6 \cdot 8 = 48$. My však vidíme iba 24 malých stien a zostáva rovnako $48 - 24 = 24$ stien, ktoré nevidíme. Z toho vyplýva, že každou farbou, aj modrou aj žltou, potrebujeme zafarbiť 24 stien malých kociek a žiadna stena nezostane nevyfarbená.

Zamerajme sa na malú kocku. Každá jedna jej viditeľná stena sa nachádza na rohu veľkej kocky, a teda každej malej kocke vidno 3 steny, ktoré majú spoločný vrchol (roh veľkej kocky). Tieto 3 steny budú určite zafarbené rovnakou farbou, napríklad modrou. Kocka má 6 stien a teda ostatné 3 steny (tie, ktoré aktuálne nevidno) potom musia byť žlté. V našom obrázku kocky $2 \times 2 \times 2$ tieto tri steny majú spoločný vrchol v strede veľkej kocky a je spoločný pre všetkých 8 malých kociek.

Ilustrujme si, ako mala kocka vyzerá a ako má ofarbené steny:



No a ako zmeníme veľkú modrú kocku na žltú? Stačí pootočiť každú z malých kociek tak, aby trojica viditeľných stien bola tá žltá, a to spraviť pre každú z týchto ôsmich kociek. A sme hotoví. Ofarbiť malú kocku máme tak, aby tri steny rovnakej farby mali spoločný práve jeden vrchol kocky.

Komentár: Úlohu ste zvládli skvele. Niet čo dodať, bodové hodnotenie hovorí za všetko. No aj napriek tomu nezabúdajte, že niekedy je lepšie napísať a nakresliť radšej viac ako menej. Ak sa vám vyfarbovanie zapáčilo, neváhajte a skúste si to aj pre väčšie kocky a viac farieb a sledujte, čo sa bude diať :)

Úloha č. 4:

opravovali Kristína Faguľová & Roman Staňo

Norbert Micheľ, Gabriela Genčiová, Frederik Ténai, Michal Masrna

Zadanie: Na stole je rovnobežne položených 5 šípov. V jednom kole vieme vybrať dva šípy a všetky šípy medzi nimi a zmeniť im orientáciu. Šípy môžu byť orientované buď na sever alebo na juh.

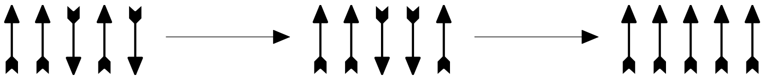
a) Šípy sú uložené tak ako na obrázku. Koľko najmenej kôl potrebujeme, aby boli všetky šípy otočené rovnakým smerom? Bude to tak vždy, alebo je nejaké rozloženie 5 šípov, kde je potrebných viac otočení?

b) Ak by bolo šípov šesť, postačí nám vždy rovnaký najmenší počet otočení ako pri piatich šípoch, aby všetky šípy boli rovnako orietované? Ak nie, uveďte príklad, ako musia byť šípy na začiatku otočené, aby sa nám to nepodarilo.

Riešenie: a) Najprv úlohu vyriešme pre nám zadaný konkrétny príklad. Tri z našich šípov už majú dobrú orientáciu, stačí nám teda otočiť zvyšné dva šípy (tie, ktoré smerujú nadol). Keďže to chceme spraviť v jednom kole, musíme ich otočiť oba naraz. Tu však nastáva problém: Ak otočíme tieto dva šípy v jednom kole, tak sa otočí aj šíp medzi nimi, ktorý už má správnu orientáciu. Dostaneme tak rozloženie:

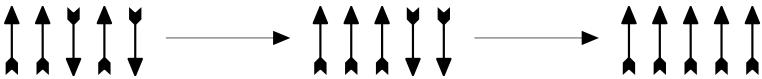
Na jedno kolo to teda určite nepôjde, lebo s dvoma šípmi, ktoré chceme na začiatku otočiť, vždy otočíme aj šíp medzi nimi, ktorý otočiť nechceme. Okrem toho sa nám môže otočiť aj druhý alebo prvý a druhý šíp zľava - to závisí od toho, či otočíme len tri šípy ako na obrázku, alebo zoberieme aj susedné šípy k našej trojici. To, ako bude vyzerať rozloženie v týchto prípadoch, nemusíme skúmať, lebo šípy na prvom, druhom a treťom mieste sprava budú otočené vždy rovnako - a to s takou orientáciou, ktorú nechceme dosiahnuť, teda orientácia dvoch zvyšných šípov nás nemusí zaujímať.

Vyskúšajme, či je možné dosiahnuť požadované rozloženie v dvoch kolách: V predchádzajúcom prípade sme videli, že otáčať 2 šípy so zlou orientáciou naraz sa nám neoplatí, lebo sa nám otočí šíp medzi nimi, ktorý potom nevieme samostatne otočiť. Skúsme ich preto otáčať postupne: Začnime šípom úplne vpravo. Keď nechceme otočiť prostredný šíp, tak musíme otočiť len prvý a druhý šíp sprava. Dostaneme tak zoradenie na obrázku v strede:



Z takéhoto rozloženia je už ťah druhého kola zrejmý - otočíme stredný šíp a šíp vpravo od neho. Dostaneme tak požadované rozloženie. Teda rozloženie vieme určite dosiahnuť na dva ťahy.

Vráťme sa ešte trochu späť a pozrime sa, čo by sa stalo, keď by sme neotočili v prvom kole šíp úplne vpravo, ale prostredný šíp. Spolu s prostredným šípom môžeme otočiť napríklad šíp, ktorý je hneď vpravo od neho. Dostaneme tak:



Odtiaľto už nie je problém dostať šípy do správneho rozloženia.

Či to platí pre ľubovoľné rozloženie 5 šípov na začiatku, je trocha náročnejšia otázka. Musíme totiž overiť všetky možnosti a vyskúšať, či všade vieme otočiť šípy jedným smerom (nemusí to byť nutne sever ako v prvej časti) na 2 kolá. Všetky možnosti rozloženia šípov môžeme rozdeliť na dve skupiny: rozloženia, kde je jeden šíp otočený inak ako ostatné, a rozloženia, kde sú dva šípy otočené inak ako ostatné.

Rozoberme prvú skupinu:

Pokiaľ bude ten jeden šíp s inou orientáciou úplne na kraji, zvyšné štyri šípy vieme otočiť naraz v jednom ťahu. Všetky šípy tak dostanú rovnakú orientáciu v jednom kole.

Pokiaľ bude ten jeden šíp s inou orientácou druhý od kraja, otočíme trojicu šípov s rovnakou orientáciou (pri tomto rozložení tam bude len jedna takáto trojica). Dostaneme tak rozloženie ako v prvom prípade tejto skupiny, ktoré je riešiteľné jedným kolom. Spolu sú to dve kolá, ktoré nám pre toto rozloženie postačia.

Ostáva posledné rozloženie šípov – šíp s opačnou orientáciou bude v strede. V takomto prípade stačí v prvom kole otočiť dvojicu rovnako orientovaných šípov na jednom kraji a v druhom kole dvojicu na druhom kraji. Na dve kolá tak vieme dostať požadované rozloženie.

Rozoberme druhú skupinu:

Pokiaľ budú oba šípy s opačnou orientáciou pri sebe, rozloženie je riešiteľné jedným kolom (v tomto kole otočíme práve tieto dva šípy).

Pokiaľ budú oba šípy s opačnou orientáciou na krajoch (na prvom a piatom mieste rozloženia), prípad je tiež riešiteľný na jedno kolo – otočíme v ňom tri šípy, ktoré sa nachádzajú medzi dvomi krajnými šípmi, a dostaneme tak požadované rozloženie.

Pokiaľ bude jeden z dvoch šípov s opačnou orientáciou na prvom (resp. piatom) a druhý na štvrtom (resp. druhom) mieste, usporiadanie je tiež riešiteľné na dve kolá, a to tak, že v prvom kole otočíme všetky šípy medzi našimi dvoma s opačnou orientáciou. Dostaneme tak prvý prípad prvej skupiny, pre ktorý sme už ukázali, že je riešiteľný na jedno kolo. Spolu sú to teda dve kolá.

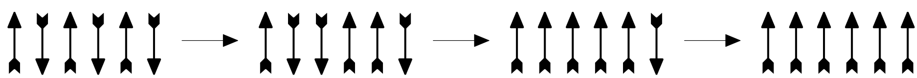
Prípad, kedy bude jeden šíp s opačnou orientáciou voči zvyšným trom v strede a druhý s opačnou orientáciou na kraji, je riešiteľný na dve kolá. To sme už ukázali v prvej otázke, časti a).

Ostáva nám už len posledný prípad - dva šípy s inou orientáciou než zvyšné tri budú na štvrtom a druhom mieste rozpoloženia. Podobnou stratégiou ako v predchádzajúcom prípade získavame riešenie: V prvom kole otočíme šíp v strede a spolu s ním aj jeden zo šípov, ktoré sú hneď vedľa neho. Dostaneme tak rozloženie ako v prvom prípade druhej skupiny, ktoré je riešiteľné na jedno kolo. Spolu sú to teda dve kolá.

Prešli sme všetky možné usporiadania pätíc šípov a pre každé sme našli cestu maximálne na dve kolá.

b) Už sme ukázali, že pre päť šípov nám stačia v každom prípade dve kolá. Ak máme šesť šípov, pri riešení postupujeme rovnako, ako keby sme šiesty šíp nemali. Po dvoch kolách teda môžu nastať len 2 situácie: šiesty šíp je rovnako otočený ako zvyšných päť alebo je otočený opačne voči ostatným piatim šípom.

Ostáva už len zistiť, či takéto rozloženie vieme dosiahnuť. Takým je napríklad usporiadanie šípov na striedačku, jeden šíp smerom hore, jeden smerom dole. Ak by sme si zobrali prvý až piaty šíp, alebo druhý až šiesty šíp, vieme ich dať do jedného smeru na 2 kroky, ale vzhľadom k šípu, ktorý sme nepoužili, to bude opačne, a teda potrebujeme tretie kolo na dokončenie. Uvedieme jedno, ale nie jediné riešenie, a zoberieme na začiatok prvých päť šípov.



Rozloženie je riešiteľné až na tri ťahy. Z toho vyplýva, že pre šesticu nám nebude vždy stačiť rovnaký počet kôl ako u piatich šípov.

Komentár: Väčšina z vás dospela k správnemu výsledku, no s vysvetľovaním, ako ste k nemu prišli, to už bolo horšie. Najčastejšou chybou v časti a) bolo to, že ste nezdôvodnili, prečo sú práve dve kolá najmenej. Keď nájdete riešenie na dve kolá, ešte to neznamená, že riešenie na jedno kolo neexistuje - to treba aj nejako dokázať. Rovnaký problém nastal aj v časti b), kde ste našli rozloženie šípov, ktoré je riešiteľné minimálne tromi kolami, no opäť ste nezdôvodnili, prečo to nejde na jedno alebo dve kolá, ale až na tri. O čosi zriedkavejšou chybou bolo to, že ste v časti a) neuvažovali všetky rozpoloženia pätíc šípov a teda váš dôkaz, že dve kolá stačia pre akékoľvek rozloženie, nebol úplný. Úlohu vyriešilo na plný počet len zopár riešiteľov. Nabudúce si dajte viac záležať na tom, aby ste podrobne opísali váš postup a všetky myšlienky počas riešenia.

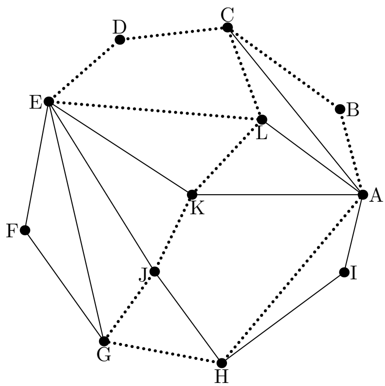
Úloha č. 5:

opravoval Tomáš Daneshjo

Norbert Micheľ, Matej Hanus

Zadanie: Dedinčania si strašne potrpia na čistotu v uliciach. Používajú na to 2 veľké zberné vozy. Jeden voz majú tí, čo **KLAMÚ**, a upratujú s ním čiarkované ulice, druhý voz majú tí dedinčania, čo **HOVORIA PRAVDU**, a upratujú ulice, ktoré sú nakreslené plnou čiarou.

V garáži G sú oba vozy zaparkované. Pri rozdelení, aké je teraz, vyčistia pravdovravní aj klamári všetky ulice, ktoré majú, a potom musia ťahať plne naložený voz naspäť do garáže po už vyčistených uliciach. Ak by klamári dali jednu z ulíc pravdovravným, tak by nikto z nich nemusel ťahať voz po vyčistených uliciach.

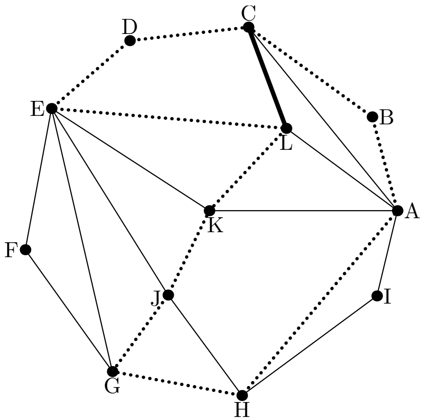


a) Ktorú ulicu majú nechať klamári pravdovravným dedinčanom?

b) Ako si potom majú pravdovravní naplánovať cestu, aby voz nemuseli ťahať po vyčistených cestách?

c) Ako si potom majú klamári naplánovať cestu, aby voz nemuseli ťahať po vyčistených cestách?

Riešenie: Na to, aby pravdovravci a klamári pri čistení ulíc nemuseli prechádzať ulicou, ktorú už vyčistili, a mohli sa vrátiť tam, odkiaľ začali pracovať (garáž G), musí ku každému miestu v dedine viesť párny počet ulíc. A to preto, že ak nejakou ulicou k miestu prídeme, inou ulicou z neho musíme odisť. Teda k miestu musia viesť 2 ulice alebo 4 ulice …



Keď sa pozrieme na obrazok, ku každému miestu v meste vedie párny počet ulíc. Avšak ak si tieto ulice rozdelíme na tie s plnou čiarou a ulice s prerušovanou čiarou, zistíme, že k miestu C vedie len jedna plná ulica, ale až tri ulice s prerušovanou čiarou, a k miestu L rovnako jedna plná ulica a tri ulice s prerušovanou čiarou. Ako sme povedali, potrebujeme párny počet ulic, a to prerušovaných a tiež tých ulíc, ktoré majú plnú čiaru. Problémové sú len tieto 2 miesta, ale navyše majú medzi sebou ulicu, a tá je nakreslená prerušovane. Preto, ak by sme ju dali pravdovravcom, náš problém pre obe miesta by sa vyriešil a šli by z nich 2 ulice s prerušovanou čiarou a 2 ulice s plnou čiarou. No a potom už nie je naročné popísať, aká bude trasa pre klamárov a aká pre pravdovravcov.

a) Klamári musia pravdovravcom dať ulicu medzi miestami L a C.

b) Trasa pravdovravcov: $G \to F \to E \to K \to A \to L \to C \to A \to I \to H \to H \to E \to G$

c) Trasa klamárov: $G \to J \to K \to L \to E \to D \to C \to B \to A \to H \to G$

Komentár: V prvom rade sa ospravedlňujeme za chybu v zadaní, na ktorú ste nás upozornili. A chválime vás, že ste buď na stránke našli oznam o úprave zadania, alebo ste si sami úlohu upravili do správneho zadania a vyriešili. Tí z vás, ktorí pracovali s pôvodným zadaním, o body neprišli. Taký bol asi len jeden riešiteľ, ktorý aj dokázal, že úloha sa nedá riešiť s pôvodným zadaním. Úloha dopadla, ako i výsledky naznačujú, veľmi dobre a sme potešení, že viacerí z vás aj popísali spôsob, ako k riešeniu dospeli, a nenapísali len priamo riešenie jednotlivých častí.

Úloha č. 6:

opravovali Tóno Grómoczki & Floro Hatala

Norbert Micheľ, Martin Albert Gbúr

Zadanie: Tento šport má nasledovné hodnotenie: Výhra sa hodnotí 10 bodmi, prehra 0 bodmi a remíza 5 bodmi. Okrem toho sa každý strelený gól hodnotí jedným bodom pre tím, ktorý gól strelil. V hodnotení sú len tri tímy - Pravdovravní, Klamári a Logaritmausovi muži. Vieme, že v každom zápase padol aspoň jeden gól. Každý tím hral minimálne jeden zápas. Tím Pravdovravných mal v hodnotení 8 bodov, Klamári mali 14 bodov a Logaritmausovi muži 9 bodov. Vypíšte, kto hral s kým a ako dopadli ich vzájomné zápasy.

Riešenie: Zo zadania netušíme, koľko zápasov sa odohralo, a tak by bolo dobré to zistiť.

Ak sa zápas skončí remízou, tak nielenže obe mužstvá dostanú po piatich bodoch za remízu, ale každé aspoň po jednom bode za vstrelené góly (to kvôli tomu, že vieme, že v každom zápase padol gól a najmenej gólová remíza, aká môže nastať, je 1:1) To je najmenej 12 pridelených bodov na zápas s remízou, vždy to bude párny počet bodov.

Ak sa zápas neskončí remízou, teda jedno mužstvo vyhrá, tak sa pridelí 10 bodov za výhru a aspoň 1 bod za vstrelený gól (výhra bez gólu nie je možná). Pridelí sa aspoň 11 bodov.

Teraz sa pozrime, koľko bodov sa pridelilo v našom hodnotení. Pravdovraní 8 bodov, Klamári 14 bodov a Logaritmausovi muži 9 bodov, čo je spolu $8 + 9 + 14 = 31$ bodov. Budeme hľadať počet zápasov, v ktorom sa mohlo nazbierať práve 31 bodov.

Tri a viac zápasov vieme celkom jednoducho vylúčiť. Ak by sa hrali tri zápasy, nech by zápasy dopadli akokoľvek, určite by sa nazbieralo aspoň $3 \cdot 11 = 33$ bodov. Naši športovci ich spolu nazbierali 31, teda hrať sa mohli iba dva alebo jeden zápas. Pri jednom zápase by si nezahrali všetky mužstvá, ale iba dve z troch, čiže aj túto možnosť môžme vylúčiť. Ostáva nám iba možnosť dvoch zápasov, s tou budeme ďalej pracovať.

Pozrieme sa na Klamárov. Je to jediné mužstvo, ktoré mohlo vyhrať zápas, keďže ako jediní maju viac ako 10 bodov. To znamená, že proti nikomu neprehrali. Najprv si rozoberieme prípad, že Klamári odohrali oba zápasy. Znovu dávame do pozornosti jav, že pri remíze získaju obe mužstvá do tabuľky rovnaký počet bodov. Možnosti, v ktorých Klamári nejaký zápas prehrali, automaticky vynechávame, keďže Pravdovravní ani Logaritmovi muži vyhrať nemohli.

a) Ak by Klamári dvakrát vyhrali, mali by aspoň 22 bodov (za dve výhry 1 : 0). To je viac, ako tím získal, preto táto možnosť nevyhovuje.

b) Ak by Klamári jeden zápas vyhrali a jeden remízovali, mali by aspoň 17 bodov (za výhru 1 : 0 a remízu 1 : 1). Spolu by to teda bolo opäť viac ako tím reálne získal, preto ani táto možnosť nevyhovuje.

c) Ak by Klamári remízovali oba zápasy, je situácia komplikovanejšia. Klamári teda odohrali jeden zapás s Pravdovravnými a jeden zápas s Logaritmausovymi mužmi a oba remízovali. To znamená, že strelili v týchto zápasoch 4 góly (mali 14 bodov a z toho 10 získali za remízy a 4 body za góly). Pravdovravní v zápase s Klamármi získali 5 bodov za remízu a 4 body za góly. Logaritmausovi muži získali za remízu 5 bodov a 3 body za góly. Ale tu prichádzame k sporu, nakoľko Pravdovravni a Logaritmausovi muži spolu dali 7 gólov, ale Klamári len 4 góly. A ak mali oba zápasy remízovať, tak tiež by museli streliť 7 gólov. Takže ani táto možnosť nemohla nastať.

Klamári teda odohrali jeden zápas, za ktorý získali 10 bodov a strelili v ňom 4 góly. Druhý zápas sa odohral medzi Pravdovravnými a Logaritmausovými mužmi a skončil remízou. Ostáva zistiť, akou remízou a ktorý z týchto dvoch tímov prehral s Klamármi.

Ako sme si vyššie popísali, ak tímy zápas medzi sebou remízovali, tak získali rovnaký počet bodov. V našom prípade Pravdovravní hrali proti Logaritmausovym mužom a remízovali s nimi 3 : 3 a oba tímy získali po 8 bodov, a to 5 bodov za remízu a 3 body za strelené góly v zápase. Pravdovravní však získali spolu o bod viac ako Logaritmausovi muži, a teda hrali aj druhý zápas, a to s Klamármi, a ten prehrali 4 : 1.

Na turnaji sa odohrali dva zápasy, a to zápas Pravdovravni:Logaritmausoví skončil 3 : 3 a zápas Pravdovravni:Klamári skončil 1 : 4.

Komentár: Teší nás, že správne výsledky zápasov ste našli takmer všetci. Veľkým problémom však bolo to, že mnohí z vás automaticky pracovali iba s možnosťou, že Klamári zápas určite vyhrali, keďže majú viac ako 10 bodov. Aj napriek tomu, že v tomto prípade vás to nepripravilo o (jediný) správny výsledok, tak bolo potrebné preveriť aj možnosť, že Klamári získali svoje body napríklad dvoma remízami. Inými slovami, pri riešení úloh si nemôžete dovoliť nepreveriť naozaj všetky možnosti, a to aj v prípade, že ste našli jednu možnosť, ktorá sedí, lebo tak môžete prísť o iné riešenia v prípade, že ich je viac.

Poradie riešiteľov po 2. sérii

Poradie	*Meno*	*Trieda*	*Škola*	*Poč.*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*Pr.*	*Súčet*
1.	Norbert Micheľ	5. A	ZKro4KE	50	7	9	9	9	9	9	9	104
2.	František Gábor	6. A	ZKro4KE	51	8	7	9	7	9	9	0	100
3. – 4.	Michal Masrna	6. B	ZKro4KE	48	4	9	9	9	9	9	0	97
	Matej Hanus	6. A	ZKro4KE	52	4	9	9	5	9	9	0	97
5. – 7.	Radován Laščák	6. B	ZKro4KE	43	9	9	9	7	9	9	0	95
	Adam Čabrák	4. A	ZKro4KE	45	7	7	9	-	9	9	9	95
	Gabriela Genčiová	5. B	ZKro4KE	43	9	9	8	9	9	5	8	95
8.	Nina Mizeráková	5. C	ZŠmerPO	48	9	8	9	2	9	5	5	93
9. – 10.	Soňa Špakovská	5. A	ZTomKe	43	9	7	9	3	9	8	7	92
	Jakub Mičko	4. B	ZKro4KE	45	4	7	9	6	9	7	9	92
11.	Matúš Masrna	4. A	ZKro4KE	44	4	9	9	-	7	9	9	91
12. – 13.	Samuel Banas	5. A	ZBrezPN	39	8	9	9	7	9	8	8	90
	Martin Albert Gbúr	6. A	ZKro4KE	42	7	9	9	5	9	9	0	90
14. – 15.	Lujza Milotová	5. A	ZBrusKE	43	9	6	9	4	9	7	6	89
	Tomáš Chovančák	6. B	ZKro4KE	42	8	9	9	6	9	6	0	89
16.	Patrik Paľovčík	6. A	ZKro4KE	47	7	7	9	5	7	5	0	87
17.	Michal Kavuľa	6. B	ZKro4KE	45	7	3	9	4	9	9	0	86
18. – 19.	Dárius Pacholský	6. A	ZKro4KE	49	4	9	9	8	-	6	0	85
	Simona Sabovčíková	5. B	ZKro4KE	45	4	3	9	8	9	6	4	85
20. – 22.	Adam Garafa	4. A	ZKro4KE	40	8	7	7	4	9	4	9	84
	Ján Richnavský	5. B	ZKro4KE	39	4	9	9	6	9	6	6	84
	Katarína Sčísláková	6. B	ZHvieLY	43	5	3	9	6	9	9	0	84
23. – 24.	Šimon Šoltés	1.OA	GTr12KE	45	4	8	9	2	9	5	0	82
	Benjamín Mravec	6. B	ZKro4KE	44	3	7	9	7	7	5	0	82
25.	Róbert Sabovčík	5. A	ZKro4KE	38	4	3	9	9	9	8	4	81
26.	Peter Zimovčák	6. B	ZKro4KE	42	7	2	9	5	7	8	0	80
27.	Erik Novák	4. A	ZKro4KE	38	4	4	9	3	9	4	9	77
28.	Frederik Ténai	5. B	ZAngeKE	40	7	3	9	9	3	4	3	75
29.	Sofia Kuliková	5. A	ZZeliKE	36	4	7	6	-	9	8	4	74
30. – 32.	Jakub Pravda	Prima A	ZSkaBA	35	4	9	7	4	9	5	0	73
	Jakub Patrik	6. A	ZKro4KE	37	9	0	9	2	9	7	0	73
	Tomáš Prielomek	5. A	ZOravJa	33	4	9	9	1	9	5	4	73
33.	Simona Vrbová	5. A	ZKro4KE	33	7	6	9	2	7	5	5	72
34.	René Čáky	Prima A	GAlejKE	34	7	8	5	3	9	5	0	71
35.	Jakub Vojčík	prima B	GAlejKE	37	7	6	2	3	9	6	0	70
36. – 37.	Martin Kozák	prima B	GAlejKE	35	4	3	9	1	9	7	0	68
	Daniela Cinkaničová	5. C	ZTomKe	35	7	7	2	0	9	6	2	68
38. – 39.	Zuzana Krajňáková	5. A	ZKro4KE	26	7	6	9	4	9	5	5	67
	Viktória Smolárová	4. A	ZOravJa	37	3	3	5	4	7	4	7	67
40.	Klára Hricová	5. A	ZKro4KE	30	9	5	9	4	-	5	4	66
41.	Martin Bertko	Prima A	GAlejKE	28	8	9	9	-	9	-	0	63
42.	Matej Štencel	5	ZŠkolMG	24	7	4	9	4	7	7	4	62
43.	Samuel Peter Kovár	5. B	ZKomeMD	30	3	1	9	2	9	6	2	61
44.	Martin Kánássy	5. B	ZKro4KE	31	3	2	5	4	7	5	3	58
45.	Soňa Liptáková	6. B	ZKro4KE	26	4	8	9	2	-	8	0	57
46. – 47.	Michaela Rusnáková	5. A	ZBrusKE	33	4	9	9	-	-	-	-	55
	Filip Franko	5. C	ZTomKe	20	7	6	5	1	9	4	4	55
48.	Simona Horváthová	5. A	ZKro4KE	28	7	0	5	2	3	4	2	51
49.	Stanislav Jochman	Prima A	GAlejKE	23	4	2	9	0	9	3	0	50
50.	Veronika Danková	Prima B	GAlejKE	25	4	3	9	2	0	5	0	48
51.	Kristína Šedovičová	5. B	ZKro4KE	17	3	3	9	1	7	4	3	46
52.	Martin Jakub Želinský	5. A	ZKro4KE	45	-	-	-	-	-	-	-	45
53.	Róbert Bažalik	5. A	ZZeliKE	39	-	-	-	-	-	-	-	39

Poradie	*Meno*	*Trieda*	*Škola*	*Poč.*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*Pr.*	*Súčet*
54.	Dávid Erdödy	5. A	ZTomKe	26	3	2	-	-	-	5	-	36
55.	Veronika Belániová	5.	ZJeleNH	18	4	2	9	2	-	-	-	35
56. – 57.	Filip Pereš	5. A	ZKro4KE	34	-	-	-	-	-	-	-	34
	Alexandra Koledová	6. A	ZHlinŽA	16	1	2	8	0	3	4	0	34
58.	Rebeka Rešteiová	Prima A	GAlejKE	12	3	0	5	-	9	4	0	33
59. – 61.	Martin Kuľka	6.	ZSDrienov	32	-	-	-	-	-	-	0	32
	Tomáš Miščík	5. B	ZKro4KE	32	-	-	-	-	-	-	-	32
	Marek Čižmár	5. B	ZTomKe	32	-	-	-	-	-	-	-	32
62. – 63.	Michaela Illeová	6. A	ZHlinŽA	12	1	0	2	1	9	4	0	29
	Blažej Fabián	5. A	ZHlavKZ	29	-	-	-	-	-	-	-	29
64. – 66.	Diana Rudzanová	prima B	GAlejKE	28	-	-	-	-	-	-	0	28
	Alica Olexová	5. A	ZTomKe	28	-	-	-	-	-	-	-	28
	Daniel Kalina	5. B	ZKro4KE	22	3	3	-	-	-	-	-	28
67.	Juraj Roman	prima B	GAlejKE	18	3	-	-	-	-	6	0	27
68. – 69.	Adam Szamosi	Prima A	GAlejKE	12	2	2	6	0	3	1	0	26
	Martin Müller	Prima A	GAlejKE	19	1	0	1	-	-	5	0	26
70. – 72.	Alex Removčík	6. A	ZŠmerPO	24	-	-	-	-	-	-	0	24
	Richard Ciglanský	Prima A	GAlejKE	24	-	-	-	-	-	-	0	24
	Dominik Červený	6. B	ZKro4KE	24	-	-	-	-	-	-	0	24
73. – 74.	Damián Baňačkai	5. A	ZKro4KE	17	-	-	-	-	-	5	-	22
	Matej Tarča	6. B	ZKro4KE	22	-	-	-	-	-	-	0	22
75. – 77.	Samo Albrecht	5. A	ZKro4KE	20	-	-	-	-	-	-	-	20
	Jaroslav Šillák	5. A	ZOravJa	20	-	-	-	-	-	-	-	20
	Jakub Vertaľ	5. B	ZKro4KE	10	3	3	-	-	0	4	-	20
78. – 79.	Anthony Martin	5. B	ZKro4KE	18	-	-	-	-	-	-	-	18
	Jozef Maximilián Vrábel	5.	ZTrencT	18	-	-	-	-	-	-	-	18
80.	Laura Antolová	5.	ZJeleNH	17	-	-	-	-	-	-	-	17
81.	Tomáš Čorej	5. C	ZŠmerPO	15	-	-	-	-	-	-	-	15
82.	Ondrej Lipták	6. A	NULL	6	3	1	-	-	-	4	0	14
83. – 85.	Filip Miroslav Kucka	6. B	ZNov2KE	13	-	-	-	-	-	-	0	13
	Matej Bačo	6. B	ZKro4KE	13	-	-	-	-	-	-	0	13
	Aurélia Zlatica Poláková	6. A	ZHlinŽA	6	0	7	-	0	-	-	0	13
86. – 89.	Jakub Barkáč	5. A	ZKro4KE	12	-	-	-	-	-	-	-	12
	Filip Fukas	6	NULL	12	-	-	-	-	-	-	0	12
	Kristína Mosejová	5. A	ZZeliKE	9	3	-	-	-	-	-	-	12
	Martin Berká	5. B	ZKro4KE	12	-	-	-	-	-	-	-	12
90.	Lea Petrželková	6	ZHlinŽA	6	0	0	-	1	0	0	0	7
91.	Anton Breicha	5. B	ZTomKe	6	-	-	-	-	-	-	-	6
92.	Matej Jaššo	6. A	ZHlinŽA	5	-	-	-	-	-	-	0	5
93.	Patrik Štefanko	Prima A	GAlejKE	4	-	-	-	-	-	-	0	4
94. – 96.	Dominik Valkovský	Prima A	GAlejKE	2	-	-	-	-	-	-	0	2
	Richard Benčík	6. A	ZHlinŽA	2	-	-	-	-	-	-	0	2
	Peter Olexa	5. A	ZTomKe	1	-	-	-	1	-	0	-	2
97.	Róbert Tóth	6.	ZZeliKE	1	-	-	-	-	-	-	0	1
98. – 100.	Daniela Einkaničová	5. C	ZTomKe	0	-	-	-	-	-	-	-	0
	Simona Jacková	4. B	ZKro4KE	0	-	-	-	-	-	-	-	0
	Michal Horanský	Prima C	ZTeplBA	0	-	-	-	-	-	-	0	0

Za podporu a spoluprácu ďakujeme

- Gymnázium Poštová 9, Košice
- Ústav matematických vied, Prírodovedecká fakulta UPJŠ, Košice
- Jednota slovenských matematikov a fyzikov, pobočka Košice
- APVV LPP–0057–09 *Rozvíjanie talentu prostredníctvom korešpondenčných seminárov a súťaží*

Názov: MALYNÁR — korešpondenčný matematický seminár
Číslo 6 • máj • Letná časť 22. ročníka (2012/2013)
Internet: `http://malynar.strom.sk`

Vydáva: Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice 1
Internet: `http://zdruzenie.strom.sk`
E-mail: `zdruzenie@strom.sk`